

# 天体の回転運動 理論入門(上)



福島登志夫

国立天文台、総合研究大学院大学

2005



## 目次(7-11は下巻)

- 0.概要
- 1.剛体
- 2.回転の数学
- 3.回転の物理学
- 4.自由回転
- 5.楕円関数
- 6.強制回転
- 7.回転の解析力学
- 8.回転の数値積分
- 9.非剛体効果
- 10.応用
- 11.相対論効果
- 12.参考文献



## 0.概要

---

- 有限天体の運動＝軌道運動＋回転運動
- 基本：剛体の回転運動理論
  - 剛体の向き表現：回転行列と角速度
  - 剛体の運動方程式：角運動量保存則
  - 剛体運動の解：自由回転と摂動
- 発展：非剛体性の効果、相対論効果
- 応用：地球回転、月の物理秤動、...



## 様々な天体の回転

- 地球回転:  $A \sim B < C$ ,  $C - A \ll C$ 
  - ほぼ一様な回転: UT1
  - 回転軸の強制運動: 歳差、章動、...
  - 非剛体効果: 極運動、回転速度変動、...
  - 類例: 火星
- 月の回転:  $A < B < C$ ,  $B - A < C - A \ll C$ 
  - 強い回転・公転相互作用...共鳴
  - 類例: ガリレオ衛星



## 様々な天体の回転(2)

- 小惑星の回転
  - ほぼ自由回転+小さな太陽のトルク
  - 大きな扁平度:  $A < B < C$
  - 長球形状も多い: 例) Ida  $A < B \sim C$
- 人工衛星の回転
  - 任意形状=任意の(A,B,C)
  - 強い摂動: 地球の重力、太陽の放射圧、...
  - 姿勢の積極的制御: 章動減衰機構



## 歴史

---

- ヒッパルコス(~BC150): 歳差の発見
- コペルニクス(1543): 歳差と地軸の関係
- ファブリチウス(1610): 太陽の回転の発見
- ホイヘンス(1673): 遠心力の理論
- ニュートン(1687): 運動の法則、万有引力、  
回転星の平衡形状、歳差の説明
- カッシニ(1693): 月の回転の法則



## 歴史(2)

---

- ダランベール(1743):ダランベールの原理、章動の予言
- ブラッドレー(1747):章動の発見
- オイラー(1765):剛体の運動方程式、極運動の予言
- ランデン(1775):ランデン変換
- ルジャンドル(1786):楕円積分の標準形



## 歴史(3)

- ラグランジュ(1788):「解析力学」
- ポアソン(1809):ポアソン近似
- ヤコビ(1829):ヤコビの楕円関数
- ポアンソ(1834):回転運動の図示化
- ハミルトン(1834):ハミルトンの原理、正準運動方程式、四元数
- コリオリ(1835):コリオリの力





## 歴史(4)

- セレ(1866): セレ正準変数
- オポルツァー(1880): オポルツァー項
- チャンドラー(1891): 極運動の発見
- 1899: 国際緯度観測事業(ILS)の開始
- 木村(1902): Z項の発見
- ポアンカレ(1910): 流体核の回転運動理論
- アインシュタイン(1915): 一般相対性理論



## 歴史(5)

- ド・ジッター(1917): 測地線歳差の計算
- アンドワイエ(1923): 回転運動の正準理論
- オールト(1927): 銀河系の回転の発見
- ウーラード(1953): 近代的月惑星運動理論に基づく地球章動理論
- モロデンスキー(1961): 弾性体地球の章動理論
- 1962: 国際極運動事業(IPMS)の開始



## 歴史(6)

- 堀(1966): Lie変換による正準摂動論
- 1969: 月レーザー測距観測(LLR)の開始
- 若生(1970): Z項の原因の解明
- 1976: LAGEOSの人工衛星レーザー測距観測(SLR)の開始
- リースキ他(1977): IAU1976歳差公式
- 木下(1977): 堀理論による剛体章動理論



## 歴史(7)

---

- ギノー(1979): 非回転原点(NRO)の提案
- 1980: 地球回転集中監視 (MERIT)キャンペーン
- 笹尾・大久保・斉藤(1980): 非剛体地球のSOS理論
- ウォール(1981): 非剛体地球の章動理論
- サイデルマン(1982): IAU1980章動理論



## 歴史(8)

---

- エックハルト(1981)、ムーンズ(1982): 月の物理秤動の解析理論
- ヘリング(1986): VLBIによる章動の観測
- ウィリアムズ(1980's): 月の回転運動の数値理論JPL/LE
- 1988: 国際地球回転監視事業(IERS)の開始

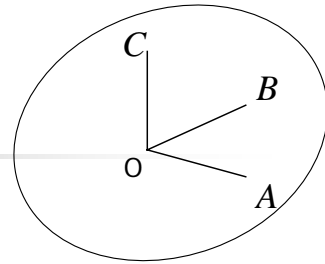


# 1. 剛体

- 有限の大きさを持つ天体の理想化
- 離散質点系で近似、次に連続化
  - 系重心の運動＝軌道運動
  - 系重心周りの運動＝回転運動
- 問題の簡単化  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_O(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{x}$ 
  - ニュートン力学
  - 拘束条件の導入→剛体概念の導入



# 剛体の概念




- 剛体 (rigid body) とは？
  - 任意の二点間の距離が**不変**である有限体
- 剛体の位置の記述：基本三角形で十分
  - 例：重心O、C軸上の1点、A軸上の1点
- 形状保持のための拘束力を仮定
- 相対性理論では不可能 (問：示せ)
- ニュートン力学でも理想の産物 (問：なぜ?)



## 剛体の特質

- 定義: 内部距離が不変である有限体
  - 「拘束のある質点系」とも考えられる
- 剛体の自由度は？(答=6)
  - 例: 3(重心位置) + 2(回転軸方向) + 1(回転角)
- 剛体に関する2つの座標系
  - 慣性系 vs 剛体固定座標系
  - 例: 地心座標系 vs 地殻固定座標系





## 自由度が6であること

- 証明のすじみち
  - 剛体中の特定三角形の空間位置が既知とする
  - 任意の第4点の自由度(=未知数)は3個
  - 第4点と特定三角形の3頂点間の距離は固定=既知
  - 未知数3個で条件式3本→第4点の位置は確定
  - 任意点の位置が確定→剛体の全体位置は確定
  - 特定三角形において、3頂点の総自由度は $3 \times 3 = 9$
  - 頂点間の距離3つは不変だから、結局 $9 - 3 = 6$
- 自由度6の取り方の一例
  - 第1点の位置3、第2点の方向角2、第3点の経度1

# 剛体の位置の表現

- 重心(3つの位置座標) + 向き(3つの変数)
- 向きの表現法
  - 基底ベクトルの三つ組  $\mathbf{E}=(\mathbf{e}_A \ \mathbf{e}_B \ \mathbf{e}_C)$
  - 3つの角度:オイラー角(12通り)  $(\psi, \theta, \phi)$
  - 回転行列  $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\psi, \theta, \phi)$
  - ハミルトンの四元数  $q_0 + q_i i + q_j j + q_k k$
  - スピノル(=パウリのスピン行列)
    - =2次元複素行列  $s_0 \sigma_0 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3$



## 剛体の運動の表現

- 重心運動(3変数) + 剛体回転(3変数)
  - 重心運動の表現  $\mathbf{X}_0(t)$ 
    - 軌道運動: ケプラー、準ケプラー、複雑な運動
  - 剛体回転の表現
    - 有限回転 → 回転行列  $\mathbf{R}(t)$
    - 無限小回転 → 角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  とのベクトル積
- $$d\mathbf{e}_J = \mathbf{e}_J(t + dt) - \mathbf{e}_J(t) = \boldsymbol{\omega}(t) dt \times \mathbf{e}_J(t)$$

# 剛体の運動方程式

## ■ 重心位置の時間変化＝軌道運動

- 位置 $\mathbf{x}$ 、速度 $\mathbf{v}$ 、質量 $m$ 、運動量 $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

- ニュートン: 運動量の時間変化＝力 $\mathbf{F}$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

## ■ 向きの時間変化＝回転運動

- 角度 $\theta$ 、角速度 $\omega$ 、慣性モーメント $\mathbf{I}$ 、角運動量 $\mathbf{L}$

- オイラー: 角運動量の時間変化＝トルク $\mathbf{N}$

- **違い**: 慣性モーメント $\mathbf{I}$ は2階テンソル

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\omega$$



## 剛体回転の解

- 自由(=トルク無し)回転
  - 角速度( $A=B$ の場合)簡単、三角関数で表現
  - 角速度(一般の場合):難解、楕円関数で表現
  - 角度:もう一回積分→不完全楕円積分
- トルクがある場合
  - トルクは一般に小さい→摂動論で十分
  - 解析理論 vs 数値積分
  - (オイラー角+角速度) vs 正準変数



## 2. 回転の数学

---

- 剛体の運動学の基礎: 直交変換
  - 無限小回転 = ベクトル積
  - 有限回転 = 回転行列
- オイラー(Euler)の定理
- 基本回転
- 角速度ベクトル

# 有限体固有座標系

## ■ 二つの座標系

- 慣性系(XYZ軸) vs 有限体に固有な座標系
- 後者の代表 = 剛体固定座標系(ABC軸)

## ■ 座標系の表現法 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_A \ \mathbf{e}_B \ \mathbf{e}_C)$

- 基底行列 = 基底ベクトルの3つ組(triad)
- 正規直交条件(6)  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$  自由度  $3 \times 3 - 6 = 3$

## ■ ベクトルの成分表示の意味

$$\mathbf{L} = L_X \mathbf{e}_X + L_Y \mathbf{e}_Y + L_Z \mathbf{e}_Z = L_A \mathbf{e}_A + L_B \mathbf{e}_B + L_C \mathbf{e}_C$$

## 基底の時間変化

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = \sum_{k=1}^3 \Omega_{jk} \mathbf{e}_k$$

- 完備性 → 時間変化を成分表現
- 正規直交性 → 係数行列は反対称

$$\frac{d(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j \cdot \frac{d\mathbf{e}_k}{dt} = 0 \rightarrow \Omega_{jk} = -\Omega_{kj}$$

- 反対称行列との積 = ベクトル積
- 結論: 基底の時間変化はベクトル積で書ける

$$\frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_A, \dots$$



## 角速度ベクトルの登場

- ベクトル $\omega$ とは何を意味するのか？
- 簡単な例：C軸成分のみ一定値 $\omega$   $\omega = \omega e_C$ 
  - C軸は不変  $e_C(t) = e_{C0}$
  - 他はC軸の周りを定角速度 $\omega$ で回転(問: 示せ)  
$$e_A(t) = e_{A0} \cos \omega t + e_{B0} \sin \omega t$$
$$e_B(t) = -e_{A0} \sin \omega t + e_{B0} \cos \omega t$$
- ベクトル $\omega =$ 回転に伴う角速度ベクトル

## 角速度の合成

- 二つの回転  $\frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_A, \dots$   $\frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_A, \dots$  を合成
- 無限小回転 = 時間経過  $\delta t$  は小さい

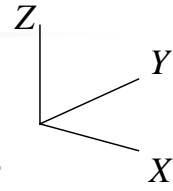
$$\mathbf{e}_A^{(1)} \approx \mathbf{e}_A^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_1 \delta t \times \mathbf{e}_A^{(0)}$$

$$\mathbf{e}_A^{(2)} \approx \mathbf{e}_A^{(1)} + \boldsymbol{\omega}_2 \delta t \times \mathbf{e}_A^{(1)} \approx \mathbf{e}_A^{(0)} + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \delta t \times \mathbf{e}_A^{(0)}$$

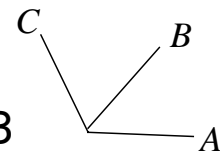
- 結論: 角速度の合成はベクトル和

# 有限回転

- 有限角度の回転操作(原点は一致)
- 多様な表現: 行列、スピノル、四元数
- 回転操作 = ある種の行列の掛け算
  - 従って、有限回転は**順序に依存**
  - 基底行列を別の基底行列に変換
- 回転行列は**直交行列**
  - 9成分あるが直交条件6 → 自由度3



**E(t)**



## 剛体性保存→直交行列

- 剛体性: 距離不変

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{x}^2$$

- 回轉: 齊次線形變換  $\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{x}$

- 剛体性→直交性

$$(\mathbf{R}\mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x}^2$$

$$\therefore \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1} \quad \text{or} \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

# 角速度行列

- 直交行列の時間微分
  - 直交性 → 角速度行列

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{dt} = - \left( \frac{d\mathbf{R}^T}{dt} \right) \mathbf{R} \equiv -\boldsymbol{\Omega}$$

- 反対称性は明らか

$$\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

## ベクトル積の意味

- 角速度行列: 3x3 反対称、自由度3
- 3次元軸性 (axial) ベクトルに等価

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

- 反対称行列との積 = ベクトル積

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

# オイラーの定理

- 任意の有限回転=らせん回転(後述)  
=基本回転行列の**三重積**

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ijk}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \mathbf{R}_k(\gamma)\mathbf{R}_j(\beta)\mathbf{R}_i(\alpha)$$

$$\left(\mathbf{R}_{ijk}(\alpha, \beta, \gamma)\right)^{-1} = \mathbf{R}_{kji}(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

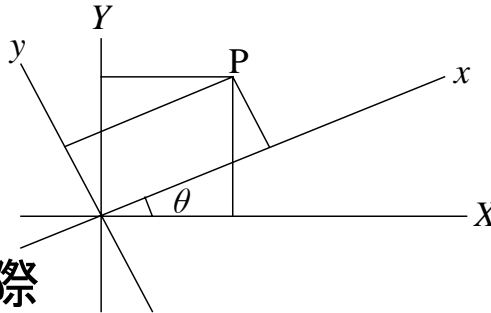
- **オイラー角**=三つの基本回転角
  - 別名:カルダノ(Cardano)角

## 基本回転の例

- 第3軸(Z軸)周りに角度 $\theta$ だけ回転

$$\mathbf{R}_3(\theta)$$

$$= \mathbf{R}_Z(\theta)$$



- 座標変換の実際

$$x_p = X_p \cos \theta + Y_p \sin \theta, \quad y_p = -X_p \sin \theta + Y_p \cos \theta$$

$$X_p = x_p \cos \theta - y_p \sin \theta, \quad Y_p = x_p \sin \theta + y_p \cos \theta$$



## 基本回転の特徴

- 第  $j$  軸周りに角度  $\theta$  だけ回転  $\mathbf{R}_j(\theta)$
- 逆行列 = 転置行列 = 逆回転行列  
 $(\mathbf{R}_j(\theta))^{-1} = (\mathbf{R}_j(\theta))^T = \mathbf{R}_j(-\theta)$
- 座標変換: 旧座標  $\mathbf{X}$ , 新座標  $\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \mathbf{R}_j(\theta) \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \mathbf{R}_j(-\theta) \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$



## 基本回転行列の表現

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 座標系回転と座標の回転

- 同一ベクトルの二つの表現

$$\mathbf{L} = L_X \mathbf{e}_X + L_Y \mathbf{e}_Y + L_Z \mathbf{e}_Z = L_A \mathbf{e}_A + L_B \mathbf{e}_B + L_C \mathbf{e}_C$$

- 座標系の回転 vs 座標の回転

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_C) \quad \begin{pmatrix} L_A \\ L_B \\ L_C \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{pmatrix}$$

- 基底行列 $\mathbf{E}$ と回転行列 $\mathbf{R}$ の**関係**は？

## 微小角近似

- 回転角が全て小さいとき

$$\mathbf{R}_3(\theta) \cong \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\theta \end{pmatrix} \times = \mathbf{1} - \theta \mathbf{e}_3 \times$$

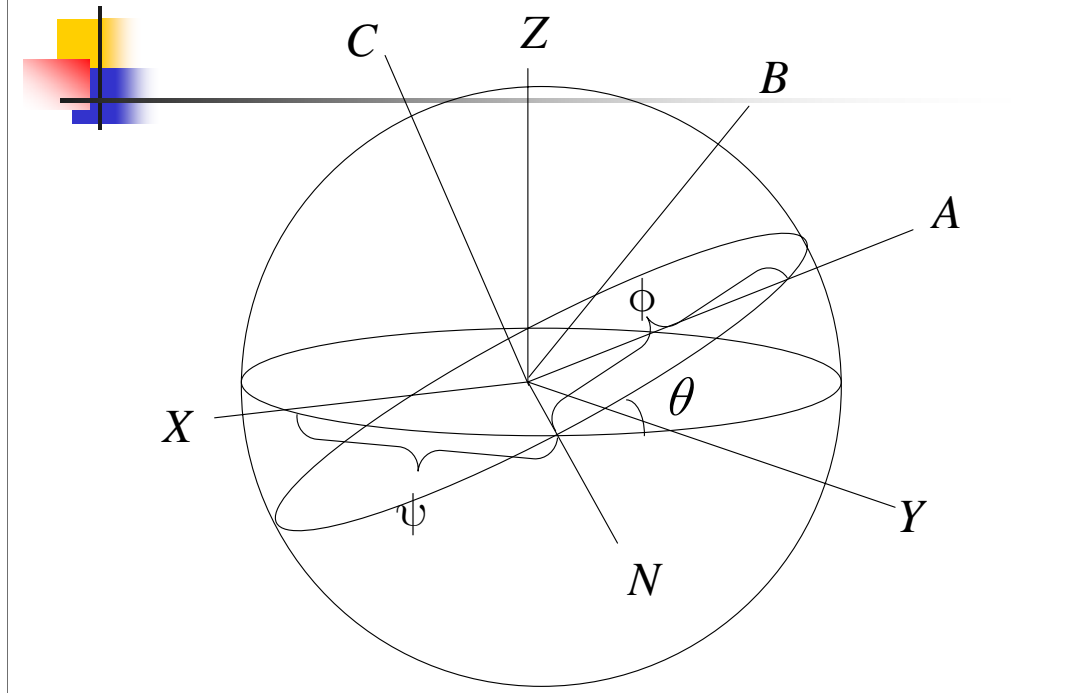
$$\therefore \prod_j \mathbf{R}_j(\theta_j) \cong \mathbf{1} - \left( \sum_j \theta_j \mathbf{e}_j \right) \times$$

## オイラー回転

- オイラー角の組み合わせ:  $3 \times 2 \times 2 = 12$  通り
  - 問:なぜ12通りか
- 3-1-3系列(=X用法):
  - 古典的な回転力学で多用、欧州流
  - 注意:英米流(Goldstein他)とは $\psi$ と $\phi$ が逆

$$\mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(\theta) \mathbf{R}_3(\psi)$$

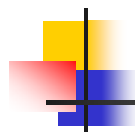
# オイラー角 (3-1-3系列)



## 3-1-3オイラー回転行列

■慣性系成分表現(問:確かめよ)

$$\mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} C_\phi C_\psi - S_\phi C_\theta S_\psi & C_\phi S_\psi + S_\phi C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\phi C_\psi - C_\phi C_\theta S_\psi & -S_\phi S_\psi + C_\phi C_\theta C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\theta S_\psi & -S_\theta C_\psi & C_\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$



## 3-1-3回転の基底

### ■ 基底の変遷

$$(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z) \rightarrow (\mathbf{e}_N, \mathbf{e}_M, \mathbf{e}_Z) \rightarrow (\mathbf{e}_N, \mathbf{e}_P, \mathbf{e}_C) \rightarrow (\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_C)$$

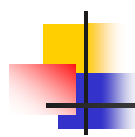
### ■ 基底のベクトル表現

$$\mathbf{e}_N = \mathbf{e}_X \cos \psi + \mathbf{e}_Y \sin \psi, \quad \mathbf{e}_M = -\mathbf{e}_X \sin \psi + \mathbf{e}_Y \cos \psi$$

$$\mathbf{e}_P = \mathbf{e}_M \cos \theta + \mathbf{e}_Z \sin \theta, \quad \mathbf{e}_C = -\mathbf{e}_M \sin \theta + \mathbf{e}_Z \cos \theta$$

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_N \cos \phi + \mathbf{e}_P \sin \phi, \quad \mathbf{e}_B = -\mathbf{e}_N \sin \phi + \mathbf{e}_P \cos \phi$$





## 3-1-3回転の基底(2)

- 基底行列と回転行列の関係(問:示せ)

$$\mathbf{E}^T = (\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_C)^T = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\psi)$$

- 基底の慣性系成分表現(問:確かめよ)

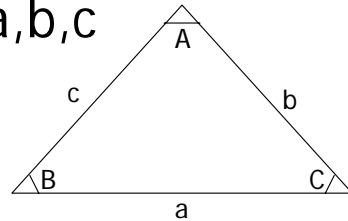
$$\mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_M = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_P = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \psi \\ \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta \end{pmatrix}, \mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi \\ \cos \phi \sin \theta \end{pmatrix}$$

# 回転行列と球面三角法

- 球面三角形: 角度 $A, B, C$ と辺 $a, b, c$

- 2つの回転が等価(問: 示せ)

$$R_1(A)R_3(c)R_1(B) = R_3(b)R_1(\pi - C)R_3(a)$$



- **球面三角**公式(問: 成分比較より導け)

- 正弦公式  $\sin a \sin B = \sin b \sin A$

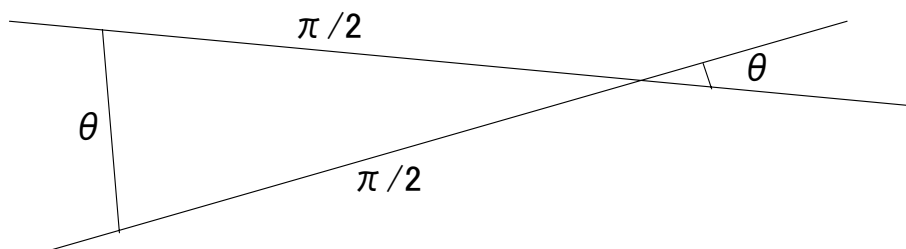
- 第1余弦公式  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

- 第2余弦公式  $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

## 3-1-3系列の欠点

- 第2軸周りの回転表現の困難

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \mathbf{R}_3\left(\frac{-\pi}{2}\right) \mathbf{R}_1(\theta) \mathbf{R}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



## 3-1-3系列の欠点(2)

- 微小角の場合の縮退

$$\mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) \cong \mathbf{1} - \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ \phi + \psi \end{pmatrix} \times$$

- 添字の2つが同じ型のj-k-j系列に共通の欠点
- 解決策
  - 1-2-3系列のように「添字がすべて異なる」系列

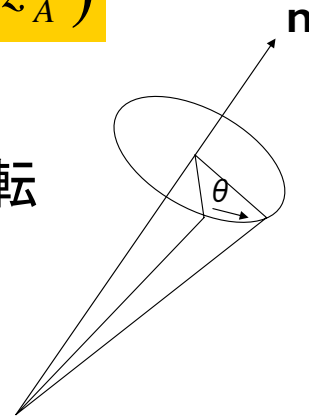
## 3-2-3系列

- 別名=Y用法、例:歳差行列

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{323}(-\zeta_A, \theta_A, -z_A)$$

- らせん回転  $\mathbf{R}_{323}(\lambda, \varphi, \theta)$   
= 固定軸  $\mathbf{n}$  周りの有限角  $\theta$  回転

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



## らせん回転公式

- らせん回転 = 固定軸  $\mathbf{n}$  の周りの有限角回転
  - 別名 : ロドリゲス (Rodriguez) の回転行列

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_{323}(\lambda, \varphi, \theta) \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{x} + \sin \theta \mathbf{n} \times \mathbf{x} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})$$

- 角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  が一定の場合  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ 
  - 回転角  $\theta = \omega t$



## 他の系列

- 1-3-1系列: 章動行列

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_{131} \left( \varepsilon_A, -\Delta\psi, -(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \right)$$

- 2-1-3系列: 極運動+恒星時回転

$$\mathbf{WS} = \mathbf{R}_{312} \left( \Theta, -y_p, -x_p \right)$$



## 1-2-3系列

- 航空力学、人工衛星の姿勢制御
  - 数学的には最も望ましい

$$\mathbf{R}_{123}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_1(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} C_\gamma C_\beta & C_\gamma S_\beta S_\alpha + S_\gamma C_\alpha & -C_\gamma S_\beta C_\alpha + S_\gamma S_\alpha \\ -S_\gamma C_\beta & -S_\gamma S_\beta S_\alpha + C_\gamma C_\alpha & S_\gamma S_\beta C_\alpha + C_\gamma S_\alpha \\ S_\beta & -C_\beta S_\alpha & C_\beta C_\alpha \end{pmatrix} \cong \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \times$$



# 角速度ベクトルの表現

- 無限小回転のベクトル表現

$$\boldsymbol{\omega} dt = d\boldsymbol{\theta} = \sum_j \mathbf{e}_{\theta_j} d\theta_j \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sum_j \left( \frac{d\theta_j}{dt} \right) \mathbf{e}_{\theta_j}$$

- 「回転軸」= 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方向
  - 注1: 角速度ベクトル  $\neq$  角度の時間変化
  - 注2: 基底ベクトルは回転によって変化
  - 注3: 角速度表現は回転の順序によらない

## 角速度表現の一例

■ 3-1-3用法  $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\psi}{dt} \mathbf{e}_\psi + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi$

■ 慣性系  $\mathbf{e}_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

■ 成分表現  $\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}$

## 角速度表現の別の例

- 剛体座標系での成分表現

$$\mathbf{e}_\psi = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 角速度の成分表現

- 別名: オイラーの

運動学的回転方程式

$$\begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

# 速度変換則

- 基底ベクトルの変化
- 剛体固定系での速度変換則
  - $D/Dt$  = 剛体系での時間微分
  - 証明

$$\frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_A, \dots$$

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X} = x_A \mathbf{e}_A + x_B \mathbf{e}_B + x_C \mathbf{e}_C, \mathbf{V} = v_A \mathbf{e}_A + v_B \mathbf{e}_B + v_C \mathbf{e}_C$$

$$\mathbf{x} = (x_A, x_B, x_C)^T, \mathbf{v} = (v_A, v_B, v_C)^T$$

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{dx_A}{dt} \mathbf{e}_A + \frac{dx_B}{dt} \mathbf{e}_B + \frac{dx_C}{dt} \mathbf{e}_C + x_A \frac{d\mathbf{e}_A}{dt} + x_B \frac{d\mathbf{e}_B}{dt} + x_C \frac{d\mathbf{e}_C}{dt}$$

$$\therefore v_A = \frac{dx_A}{dt} + (\omega_B x_C - \omega_C x_B) \rightarrow \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

## 速度変換則の別表現

- 標語的な表現  $\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times$
- 二つの時間微分
  - (慣性系での) 真の時間微分:  $d/dt$
  - (剛体系での) 成分の時間微分:  $D/Dt$
- 慣性系での表現 vs 剛体座標系での表現

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}$$

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$



## 3. 回転の物理学

- 有限体の全運動量と全角運動量
- 角運動量保存則
- 剛体固定座標系での角運動量表現
- 慣性モーメントの登場
- トルク(偶力)の表現
- オイラーの回転運動方程式

# ニュートンの運動方程式

- 有限体の各構成要素(質点)について
- 力=外力+内力(有限体内の相互作用)
  - 内力の例: 分子間力、電磁力、弱・強相互作用

$$m_K \frac{d^2 \mathbf{X}_K}{dt^2} = \mathbf{F}_K + \sum_{J \neq K} \mathbf{F}_{JK}$$

## 重心の運動

- 有限体の総質量  $M \equiv \sum_K m_K$
- 有限体の重心  $M\mathbf{X}_O \equiv \sum_K m_K \mathbf{X}_K$
- 内力: 作用・反作用の(弱)法則  $\mathbf{F}_{JK} = -\mathbf{F}_{KJ}$
- 重心の運動は**内力によらない**(問: 示せ)

$$M \frac{d^2 \mathbf{X}_O}{dt^2} = \mathbf{F} \equiv \sum_K \mathbf{F}_K$$



## 角運動量の導入

■ (線形)運動量 $\leftrightarrow$ 角運動量  $\mathbf{L}_K \equiv m_K \mathbf{X}_K \times \mathbf{V}_K$

■ 全角運動量

=軌道角運動量+回転角運動量

$$\mathbf{L}_{\text{Total}} \equiv \sum_K \mathbf{L}_K$$

■ 問: 示せ

$$\mathbf{L}_{\text{Total}} = \mathbf{L}_O + \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}_O = M \mathbf{X}_O \times \mathbf{V}_O,$$

$$\mathbf{L} = \sum_K m_K (\mathbf{X}_K - \mathbf{X}_O) \times (\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_O)$$

# ■ 離散系から連続系へ

- 離散和 → 連続積分
  - 質量密度分布関数  $\rho(\mathbf{x})$

$$\sum_K m_K \mathbf{P}_K \rightarrow \int \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$$

- 例: 回転角運動量  $\mathbf{L}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_K m_K (\mathbf{X}_K - \mathbf{X}_O) \times (\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_O) \\ &\rightarrow \mathbf{L} = \int \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \end{aligned}$$

# 全角運動量

- 作用・反作用の強法則を仮定
  - 強法則＝拘束力が中心力(電磁力などでは不可)

$$\mathbf{F}_{JK} \propto \mathbf{X}_J - \mathbf{X}_K$$

- 全角運動量の時間変化＝外力だけが支配
  - (問: 示せ)

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{Total}}}{dt} = \sum_K \mathbf{X}_K \times \mathbf{F}_K$$

## 回転角運動量

- 重心加速度を導入

$$\mathbf{A}_O \equiv \frac{\mathbf{F}}{M}$$

$$\mathbf{A}_K \equiv \frac{\mathbf{F}_K}{m_K}$$

- 回転角運動量の時間変化 = 重心周りのトルク

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_K m_K (\mathbf{X}_K - \mathbf{X}_O) \times (\mathbf{A}_K - \mathbf{A}_O) \\ &= \int \mathbf{x} \times \mathbf{a}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \equiv \mathbf{N} \end{aligned}$$

- 潮汐加速度

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{A}_K - \mathbf{A}_O$$

# 潮汐加速度

- 定義: 重心の加速度 $\mathbf{A}_O$ との差

- よく行われる近似

- 位置のみに依存
- 変位の1次項まで

$$\mathbf{a}_K \approx \left( \frac{\partial \mathbf{A}_K}{\partial \mathbf{x}_K} \right)_O \mathbf{x}_K$$

- 典型例: 外部質点と内部質点K間の万有引力

$$\mathbf{A}_K = \frac{Gm}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_K|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_K) \quad \mathbf{a}_K = \left( \frac{Gm}{r^5} \right) [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}_K) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{x}_K]$$

- 注意: 必ずしも  $\mathbf{A}_O = \mathbf{A}_K (\mathbf{x}_K = \mathbf{x}_O)$  とは限らない

## 回転角運動量(2)

- 剛体近似:  $D\mathbf{x}/Dt=0 \rightarrow \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ 
  - 回転角運動量  $\mathbf{L}$  は  $\boldsymbol{\omega}$  の線形関数

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

- 慣性モーメント・テンソル  $\mathbf{I}$  (問: 示せ)

$$(\mathbf{I})_{ij} = I_{ij} = \int (\mathbf{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

- 「角運動量軸」 = 角運動量ベクトルの方向

# 慣性モーメント

- 2階(質量)モーメント・テンソルの導入

$$J_{ij} = \int x_i x_j \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$$

- 慣性モーメント・テンソルの表現(問: 示せ)

$$I_{XX} = \frac{1}{2}(J_{YY} + J_{ZZ} - J_{XX}) \quad I_{ij} = -J_{ij} \quad (i \neq j)$$

- 添字の周回変更(X→Y→Z)が成立

# 回転エネルギー

- 再び剛体近似( $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ )で評価

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j \end{aligned}$$

- 角速度ベクトル一定でT最大  
→ 回転軸と角運動量軸が一致



# 慣性楕円体

- $I$ に伴う基準楕円体面  $\sum_{i,j=1}^3 I_{ij}x_i x_j = 1$

- 2次形式の理論→適当な変換で対角化

$$\tilde{I}_{11}\tilde{x}_1^2 + \tilde{I}_{22}\tilde{x}_2^2 + \tilde{I}_{33}\tilde{x}_3^2 = 1$$

- 対角化後の対角要素 = 主慣性モーメント

$$A \leq B \leq C \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

- 逆数  $a \equiv A^{-1} \geq b \equiv B^{-1} \geq c \equiv C^{-1}$

## 慣性主軸座標系

- $\mathbf{I}$ が対角化された座標系
- 剛体固定座標系として、よく採用される
- 慣性主軸(座標)系での表現
- 「**形状軸**」=C軸

Figure Axis

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

## 慣性主軸系での表現

- 回転に関する物理量が平易に表現
- 回転角運動量 
$$\begin{pmatrix} L_A \\ L_B \\ L_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_A \\ B\omega_B \\ C\omega_C \end{pmatrix}$$
- 回転エネルギー

$$T = \frac{1}{2} (A\omega_A^2 + B\omega_B^2 + C\omega_C^2)$$

# 慣性主軸系の基底

- 慣性系での表現: 3-1-3オイラー角の場合

$$(\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_C)^T = \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(\theta) \mathbf{R}_3(\psi)$$

$$\mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

## 慣性モーメント(2)

- 慣性主軸系の基底による**ディアド**表現

$$\mathbf{I} = A\mathbf{e}_A \otimes \mathbf{e}_A + B\mathbf{e}_B \otimes \mathbf{e}_B + C\mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C$$

- 逆行列も簡単(問:確かめよ)

$$\mathbf{I}^{-1} = a\mathbf{e}_A \otimes \mathbf{e}_A + b\mathbf{e}_B \otimes \mathbf{e}_B + c\mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C$$

- ディアド(Dyadic) = ベクトルの直積

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{jk} = (\mathbf{a})_j (\mathbf{b})_k = a_j b_k$$



# 主慣性モーメント

---

- 球対称
  - $A=B=C$
- 回転対称(扁平球、ハンバーガー型)
  - $A=B<C$
- 回転対称(長球、レモン型)
  - $A<B=C$
- 一般: $A<B<C$

## 主慣性モーメント(2)

- 一様密度三軸不等楕円体(問:確かめよ)
  - 周回変更(A→B→C)が成立

$$A = \frac{4\pi}{15} R_A R_B R_C (R_B^2 + R_C^2)$$

$$\frac{C - A}{B} = \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_A^2 + R_C^2}$$

- 例:小惑星Ida...A<B~C

$$R_A = 59.8 \text{ km}, R_B = 25.4 \text{ km}, R_C = 18.6 \text{ km}$$

$$\frac{A}{C} = 0.235, \frac{B}{C} = 0.929$$

## 主慣性モーメント(3)

- 地球: Earth...  $A \sim B < C$

$$\frac{C_E - A_E}{C_E} = 3.284741 \times 10^{-3}, \frac{B_E - A_E}{C_E} = 2.196 \times 10^{-6}, \frac{C_E}{M_E R_E^2} = 0.330701$$

$$GM_E = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, R_E = 6.3781366 \times 10^6 \text{ m}$$

- 月: Moon...  $A < B < C$

$$\frac{C_M - A_M}{B_M} = 6.32 \times 10^{-4}, \frac{B_M - A_M}{C_M} = 2.33 \times 10^{-4}, \frac{C_M}{M_M R_M^2} = 0.389$$

$$\frac{M_M}{M_E} = 1.230002 \times 10^{-2}, R_M = 1.738 \times 10^6 \text{ m}$$



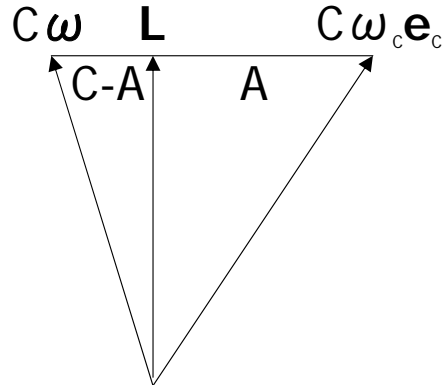
## 三つの軸

- 回転軸 $\omega$  vs 角運動量軸 $\mathbf{L}$  vs 形状軸 $\mathbf{e}_C$ 
  - 混同しやすいので注意
  - 極軸(pole)とは？
- 慣性主軸系で表示すると

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} A\omega_A \\ B\omega_B \\ C\omega_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 三つの軸(2)

- $A=B<C$ の場合  $\mathbf{L} = A\boldsymbol{\omega} + (C-A)\omega_c \mathbf{e}_c$ 
  - 問:確かめよ
- 3つの軸が同一平面内にあることを意味
- $A\sim C$ の場合:角運動量軸は回転軸に非常に近く形状軸から遠い



## 回転運動の図示化

- ポアソンの方法(Poinsot, 1851)

- 自由回転の場合: 動円錐と定円錐

- ポルホード(Polhode)

- 慣性楕円体面上の回転軸 $\omega$ の軌跡

$$\omega_A(t), \omega_B(t), \omega_C(t) \quad A\omega_A^2 + B\omega_B^2 + C\omega_C^2 = 2T$$

- ハーポルホード(Herpolhode)

- 慣性系での適当な平面上の回転軸 $\omega$ の軌跡

$$\omega_X(t), \omega_Y(t), \omega_Z(t) \quad c_X\omega_X + c_Y\omega_Y + c_Z\omega_Z = c_0$$



# 回転運動方程式

## ■ 回転角運動量の保存則

- 慣性系記法  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$

- 慣性主軸系・角運動量記法

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \mathbf{N} - (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L}$$

- 慣性主軸系・角速度記法(オイラー1765)

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mathbf{I}^{-1} (\mathbf{N} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

## 潮汐力によるトルク

- 外部質点が有限体に及ぼすトルクの**主要項**

$$\mathbf{N} = \frac{3\mu}{r^5} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{r} \times \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

- 例：月・太陽が地球に及ぼす場合
  - 月・太陽のGM =  $\mu$ 、**地心**位置ベクトル $\mathbf{r}$
- 一般のトルク：作用・反作用の法則から
  - F:有限体が外部質点に及ぼす力  $\mathbf{N} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}$

## 回転運動方程式(2)

### ■ 慣性系記法 ( $\psi, \theta, \phi, \mathbf{L}$ )

- 運動学的部分(角度の時間変化)は角速度ベクトルの表現を逆に解いて求める

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_z - \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_x \cos \psi + \omega_y \sin \psi$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_x \sin \psi - \omega_y \cos \psi}{\sin \theta}$$

$$\mathbf{N} = N_A \mathbf{e}_A + N_B \mathbf{e}_B + N_C \mathbf{e}_C$$

## 回轉運動方程式(3)

■ 慣性主軸系・角運動量記法 ( $\psi, \theta, \phi, L_A, L_B, L_C$ )

■ 問: 導け

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{aL_A \sin \phi + bL_B \cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = aL_A \cos \phi - bL_B \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = cL_C - \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$\frac{dL_A}{dt} = N_A - (b-c)L_B L_C$$

$$\frac{dL_B}{dt} = N_B - (c-a)L_C L_A$$

$$\frac{dL_C}{dt} = N_C - (a-b)L_A L_B$$

## 回轉運動方程式(4)

■ 慣性主軸系・角速度記法 ( $\psi, \theta, \phi, \omega_A, \omega_B, \omega_C$ )

■ 問: 導け

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_A \sin \phi + \omega_B \cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_A \cos \phi - \omega_B \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_C - \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$\frac{d\omega_A}{dt} = \frac{N_A - (C - B) \omega_B \omega_C}{A}$$

$$\frac{d\omega_B}{dt} = \frac{N_B - (A - C) \omega_C \omega_A}{B}$$

$$\frac{d\omega_C}{dt} = \frac{N_C - (B - A) \omega_A \omega_B}{C}$$





## 自明解: $A=B=C$

- 最も簡単な解: 球対称剛体の場合など
- まず、トルク=0 (問:なぜか?)
- 角運動量ベクトル一定 → 角速度ベクトル一定
- $A=B=C$  → 角運動量軸=回転軸
- 座標変換: 角運動量軸を新C軸に
- 角度の時間変化
  - 回転角は時間の線形関数、他は一定(=0)
- 結果: **一様回転**



# 軌道 vs 回転

項目	軌道運動	回転運動
位置	位置ベクトル $X$	オイラー角( $\psi \theta \phi$ )
速度	速度ベクトル $V$	角速度ベクトル $\omega$
質量	スカラー質量 $M$	慣性モーメント $I$
運動量	$P = MV$	$L = I \omega$
運動エネルギー	$MV^2/2$	$\omega \cdot I \omega / 2$
運動方程式	$dP/dt = F$	$dL/dt = N$
自由運動	等速直線運動	自由回転(難解)

## 4. 自由回転

- 自由回転 = **トルク無し** (ケプラー運動に対応)
  - 角速度部分と角度部分が分離 → 解析的に積分可能
- エネルギー積分  $T$  と角運動量積分 ( $L_x, L_y, L_z$ )
- 特殊解
  - 初期に慣性主軸と回転軸が一致 → 永久回転
- 一般解
  - $A=B$ : 三角関数、自由極運動 + 自由歳差運動
  - $A < B$ : ヤコビの楕円関数 + 不完全楕円積分で表現

## 自由回転の特殊解

- 角運動量ベクトルが慣性主軸のどれかに一致
- 解は一様な回転(「永久回転」と呼ぶ)
- C軸の場合
  - 力学部分の解  $L_A = L_B = 0, L_C = C\omega_0$
  - 運動学部分の解  $\psi = \psi_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0 + \omega_0 t$
  - 座標系を適当にとると  $\psi = \theta = 0, \phi = \omega_0 t$
- 安定性は？

## 特殊解の安定性

- 仮定: 他の角速度成分が微小
- 手法: 線形成長率を求める(例: C軸周り)

$$L_A, L_B \ll L_C \sim L_0 \quad L_A, L_B \propto e^{\lambda t}$$

$$\frac{dL_A}{dt} \sim -(b-c)L_0L_B, \quad \frac{dL_B}{dt} \sim -(c-a)L_0L_A$$

$$\rightarrow \lambda^2 = (b-c)(c-a)L_0^2 < 0$$

- 周回変更(A, a  $\rightarrow$  B, b  $\rightarrow$  C, c)が成立
- 結論: A or C軸周りは安定  $\Leftrightarrow$  B軸周りは**不安定**

# A=B<C

- 自明な積分以外の積分
  - 角運動量LのC軸成分
- LのA,B軸成分: **単振動**

$$\frac{dL_C}{dt} = 0 \rightarrow L_C = C\omega_0$$

$$\frac{dL_A}{dt} = -\Omega L_B$$

$$\Omega = (a - c)L_C = \frac{C - A}{A}\omega_0$$

$$\frac{dL_B}{dt} = +\Omega L_A$$

$$\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)_{\text{Earth}} \approx 303.438 \text{ day}$$

## A=B<C(2)

- 剛体固定座標系で見たとき、角運動量ベクトル  $L$  は遅い歳差運動

$$L_A = L_{A0} \cos \Omega t - L_{B0} \sin \Omega t$$

$$L_B = L_{A0} \sin \Omega t + L_{B0} \cos \Omega t$$

- 角速度ベクトル  $\omega$  (=回転軸) も、同様の単振動 (=自由章動 =自由極運動)

$$\omega_A = \omega_{A0} \cos \Omega t - \omega_{B0} \sin \Omega t$$

$$\omega_B = \omega_{A0} \sin \Omega t + \omega_{B0} \cos \Omega t$$

- 地球のオイラー(自由振動)周期~303日

## A=B<C (3)

- 保存される回転角運動量  
方向をZ軸に取り直すと...
- $$L_A = G \sin \theta \sin \phi$$
- $$L_B = G \sin \theta \cos \phi$$
- $$L_C = G \cos \theta$$
- $$G \equiv |\mathbf{L}|$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{L_A}{L_B} \right) = \phi_0 - \Omega t, \quad \theta = \theta_0 \equiv \cos^{-1} \left( \frac{L_C}{G} \right)$$

- 回転角  $\phi$ 、傾斜角  $\theta$  の解から歳差角  $\psi$  を求める

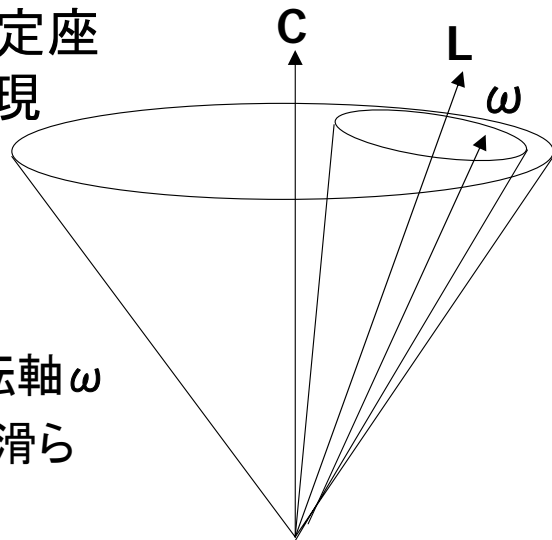
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \theta} \left( \omega_0 - \frac{d\phi}{dt} \right) \rightarrow \psi = \psi_0 + aGt$$

- 解: 遅い逆方向回転、一定傾斜、速い歳差運動



## 動円錐と定円錐

- 自由回転の剛体固定座標系での幾何学表現
  - $A=B < C$ の場合
  - 定円錐: C軸中心
  - 動円錐: L軸中心
  - 動円錐の母線: 回転軸  $\omega$
  - 動円錐が定円錐に滑らずに接して転がる





## A < B < C

- 自由回転の運動方程式(角運動量記法)

- 二つの**保存量**

(問:確かめよ)

$$2T = aL_A^2 + bL_B^2 + cL_C^2$$

$$G^2 = L_A^2 + L_B^2 + L_C^2$$

$$\frac{dL_A}{dt} = -(b-c)L_B L_C$$

$$\frac{dL_B}{dt} = -(c-a)L_C L_A$$

$$\frac{dL_C}{dt} = -(a-b)L_A L_B$$

## $A < B < C (2)$


- 角速度記法の場合

- 慣性パラメータの導入

$$\alpha \equiv \frac{C-B}{A} > 0, \beta \equiv \frac{A-C}{B} < 0, \gamma \equiv \frac{B-A}{C} > 0$$

- 慣性パラメータ恒等式(問: 示せ)

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma = 0$$



## A < B < C (3)

- 自由回転の運動方程式 (角速度記法)

$$\frac{d\omega_A}{dt} = -\alpha\omega_B\omega_C$$

- 再び二つの保存量  
(問: 示せ)

$$2T = A\omega_A^2 + B\omega_B^2 + C\omega_C^2$$

$$G^2 = A^2\omega_A^2 + B^2\omega_B^2 + C^2\omega_C^2$$

$$\frac{d\omega_B}{dt} = -\beta\omega_C\omega_A$$

$$\frac{d\omega_C}{dt} = -\gamma\omega_A\omega_B$$

## A < B < C (4)

- 特性量(どれも初期条件に依存)

- 特性慣性モーメント

$$D \equiv \frac{G^2}{2T}$$

$$A \leq D \leq C$$

- 特性逆(慣性)モーメント

= 特性慣性モーメントの逆数

$$d \equiv \frac{1}{D}$$

$$a \geq d \geq c$$

- 特性角速度

- 関係式  $D\omega_D = G$

$$\omega_D \equiv \frac{2T}{G}$$

## A < B < C (5)

### ■ キルヒホッフの変数変換

- 特性量を用いる(やや天下りのだが...)

- 時間:  $t \rightarrow u$   $u \equiv G\sqrt{(a-d)(b-c)}(t-t_0)$

- 角運動量:  $L_A, L_B, L_C \rightarrow x, y, z$

$$\frac{L_A}{G} \equiv \sqrt{\frac{d-c}{a-c}}x, \quad \frac{L_B}{G} \equiv \sqrt{\frac{d-c}{b-c}}y, \quad \frac{L_C}{G} \equiv \sqrt{\frac{a-d}{a-c}}z$$

- 初期条件  $L_B = 0$  when  $t = t_0$

## A < B < C (6)

- 変数変換後の方程式(問:確かめよ)

- 問:変換後がこうなるように元の変数変換を導け

$$\frac{dx}{du} = -yz, \quad \frac{dy}{du} = zx, \quad \frac{dz}{du} = -k^2 xy$$

- 楕円関数の母数k

$$k^2 \equiv \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)} \geq 0$$

- 解はヤコビの楕円関数

$$x = \operatorname{cn}(u; k), \quad y = \operatorname{sn}(u; k), \quad z = \operatorname{dn}(u; k)$$

## A < B < C (7)

- **低エネルギー**の仮定 ( $b < d \rightarrow k < 1$ )

- 再びZ軸をL軸  
にとると...

$$L_A = A\omega_A = G \sin \theta \sin \phi = G \sqrt{\frac{d-c}{a-c}} \operatorname{cn}(u; k)$$

$$L_B = B\omega_B = G \sin \theta \cos \phi = G \sqrt{\frac{d-c}{b-c}} \operatorname{sn}(u; k)$$

- **ポルホード**

$$L_C = C\omega_C = G \cos \theta = G \sqrt{\frac{a-d}{a-c}} \operatorname{dn}(u; k)$$

- 角運動量楕円  $(a-c)L_A^2 + (b-c)L_B^2 = (d-c)G^2$

- 角速度楕円  $(C-A)A\omega_A^2 + (C-B)B\omega_B^2 = 2CT - G^2$



## $A < B < C$ (8)

### ■ 回転角と傾斜角の解

- 揺れながらゆっくり減少する回転角  $\phi$  (問: 示せ)

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{L_A}{L_B} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(u; k) - \tan^{-1} \left( \frac{(1-\sigma) \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k)}{\sigma + (1-\sigma) \operatorname{sn}^2(u; k)} \right)$$

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \leq 1$$

- 一定値の周りに振動する傾斜角  $\theta$  (問: 示せ)

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{L_C}{G} \right) = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{a-d}{a-c}} \operatorname{dn}(u; k) \right)$$

## $A < B < C$ (9)

- 歳差角  $\psi$  : 第三種不完全楕円積分 (問: 示せ)
  - Kinoshita (1992, CMDA)

$$\begin{aligned}\psi &= \int \frac{aL_A \sin \phi + bL_B \cos \phi}{\sin \theta} dt \\ &= \psi_0 + cG(t - t_0) + \frac{a - c}{\sqrt{(a - d)(b - c)}} \text{pn}(u; n, k)\end{aligned}$$

- 第三種楕円積分の **パラメータ**

$$n \equiv \frac{a - b}{b - c} = \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2}$$

# A < B < C (10)

- 自転角の周期

$$P_{\phi} \equiv \frac{4K}{\nu} = \frac{4K}{G\sqrt{(a-d)(b-c)}}$$

$$\beta \equiv \tan^{-1} \sqrt{\frac{d-c}{a-d}}$$

- 歳差角の周期 (問: 示せ)

$$P_{\psi} = \frac{2\pi}{G \left[ c + (a-c) \left\{ \frac{k^2}{k^2+n} + \left( \frac{\pi}{2K} \right) \frac{\sqrt{n}\Lambda_0(\beta; k)}{\sqrt{(1+n)(k^2+n)}} \right\} \right]}$$

## 5. 楕円関数

- ヤコビの楕円関数 (Jacobi 1829) :  $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ 
  - おすすめの参考書: Byrd and Friedman (1954)
- $\text{sn}$ : 第1種不完全楕円積分(有理式形)の逆関数

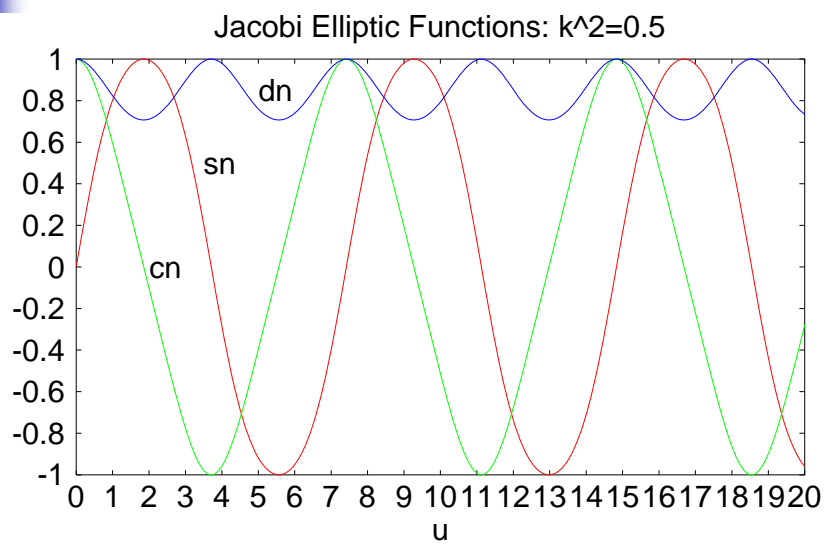
$$u = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \equiv \text{sn}^{-1}x$$

$$\text{cn}(u; k) \equiv \pm\sqrt{1-\text{sn}^2(u; k)}, \text{dn}(u; k) \equiv \sqrt{1-k^2\text{sn}^2(u; k)}$$

- 引数(argument)  $u$ 、母数(modulus)  $k$ 
  - 普通は母数を省略して表記



# 楕円関数のグラフ



# 振幅関数

- 第1種不完全楕円積分(三角関数形)の逆関数

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \equiv \text{am}^{-1} \varphi$$

- 振幅(amplitude)関数  $\varphi = \text{am}(u; k)$
- 楕円関数の三角関数的表現

$$\text{sn}u = \sin \varphi, \quad \text{cn}u = \cos \varphi, \quad \text{dn}u = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$$

## 楕円関数の母数

- 母数(modulus):  $k$
- $m=k^2$ のほうが扱いやすい
  - 不完全楕円積分の定義式から明らか
- 母数の補数(complimentary modulus)  
 $k' = k_c \equiv \sqrt{1-k^2}$
- 母数を陽に表記するときは表現法に注意  
 $\text{sn}(u|m) \equiv \text{sn}(u;k)$ , etc.

## 楕円関数の諸公式

### ■ 恒等式

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$$

### ■ 特殊な母数

- $k=0$ のとき  $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u \rightarrow \sin u, \cos u, 1$

- $k=1$ のとき  $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u \rightarrow \tanh u, \operatorname{sech} u, \operatorname{sech} u$

### ■ 特殊な引数 ( $K(k)$ は第1種完全楕円積分)

- $u=K/2$ のとき  $(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+k}}, \sqrt{\frac{k}{1+k}}, \sqrt{k} \right)$



## 楕円関数の記法

- ゲーデルマン(Guderman)記法
  - 正弦振幅sn、余弦振幅cn、デルタ振幅dn
  - 正接振幅tn=sn/cn, dn(u;k)=Δ(φ)
- グレイシャー(Glaisher)記法(分数記法)
  - p,q,rは(s,c,d,n)のどれか  $pq(u;k) \equiv \frac{pr(u;k)}{qr(u;k)}$
  - 例

$$nd(u;k) = \frac{1}{dn(u;k)}, sd(u;k) = \frac{sn(u;k)}{dn(u;k)}, cs(u;k) = \frac{cn(u;k)}{sn(u;k)}$$

# 楕円関数の逆関数

- 逆楕円関数の基本: 2変数逆楕円関数

$$x = \operatorname{rcn}(u; k), y = \operatorname{rsn}(u; k) \rightarrow u = \operatorname{atn2}(y, x; k)$$

- 第1種不完全楕円積分(三角関数形)による表現

$$\operatorname{atn2}(y, x; k) = F(\operatorname{atan2}(y, x); k)$$

- 振幅関数の一般表現(下記の[]はガウス記号)

$$\operatorname{am}(u; k) = 2\pi \left[ \frac{u}{4K(k)} \right]_{\text{Gauss}} + \operatorname{atan2}(\operatorname{sn}(u; k), \operatorname{cn}(u; k))$$



## 母数の逆数変換

- 母数の範囲の制限

- 逆数変換 + 虚数変換  $\rightarrow 0 < k < 1$
- ガウス変換 + ランデン変換  $\rightarrow k \sim 0$  or  $k \sim 1$

- 逆数変換

- $k > 1$  を  $k < 1$  に

$$k \rightarrow k^{-1}$$

$$\operatorname{sn}(u; k) = k^{-1} \operatorname{sn}(ku; k^{-1})$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = \operatorname{dn}(ku; k^{-1})$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = \operatorname{cn}(ku; k^{-1})$$

## 母数の虚数変換

### ■ 虚数変換

- 純虚数の $k$ を  
実数の $k$ に

$$k \rightarrow \tilde{k} \equiv \sqrt{\frac{-k^2}{1-k^2}}$$

$$u \rightarrow \tilde{u} \equiv \sqrt{1-k^2}u$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = \frac{\operatorname{cn}(\tilde{u}; \tilde{k})}{\operatorname{dn}(\tilde{u}; \tilde{k})}$$

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{\sqrt{1-\tilde{k}^2} \operatorname{sn}(\tilde{u}; \tilde{k})}{\operatorname{dn}(\tilde{u}; \tilde{k})}$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = \frac{1}{\operatorname{dn}(\tilde{u}; \tilde{k})}$$



## (上昇)ランデン変換

- いわゆるランデン(Landen)変換

- $k < 1$ を、より大きく(=なるべく1に近づける)

$$k \rightarrow \bar{k} \equiv \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

$$u \rightarrow \bar{u} \equiv \frac{u}{1+\sqrt{1-k^2}}$$

$$\text{cn}(u; k) = \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\text{sn}(\bar{u}; \bar{k})\text{cn}(\bar{u}; \bar{k})}{\text{dn}(\bar{u}; \bar{k})}$$

$$\text{sn}(u; k) = \frac{1-(1+\sqrt{1-k^2})\text{sn}^2(\bar{u}; \bar{k})}{\text{dn}(\bar{u}; \bar{k})}$$

$$\text{dn}(u; k) = \frac{1-(1-\sqrt{1-k^2})\text{sn}^2(\bar{u}; \bar{k})}{\text{dn}(\bar{u}; \bar{k})}$$



## 下降ランデン変換

- 別名: **ガウス**変換
  - $k < 1$ を、より小さく

$$k \rightarrow \hat{k} \equiv \left( \frac{k^2}{1 + \sqrt{1 - k^2}} \right)^2$$

$$u \rightarrow \hat{u} \equiv \frac{u}{1 + \hat{k}}$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = \frac{\operatorname{cn}(\hat{u}; \hat{k}) \operatorname{dn}(\hat{u}; \hat{k})}{1 + \hat{k} \operatorname{sn}^2(\hat{u}; \hat{k})}$$

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{(1 + \hat{k}) \operatorname{sn}(\hat{u}; \hat{k})}{1 + \hat{k} \operatorname{sn}^2(\hat{u}; \hat{k})}$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = \frac{1 - \hat{k} \operatorname{sn}^2(\hat{u}; \hat{k})}{1 + \hat{k} \operatorname{sn}^2(\hat{u}; \hat{k})}$$

# ヤコビのノームq

- 楕円関数などの高速展開に用いる
  - 定義: 完全楕円積分Kと、その補数K'

$$K'(k) \equiv K(k')$$

$$q \equiv \exp\left(\frac{-\pi K'}{K}\right) = \lambda(1 + 2\lambda^4 + 15\lambda^8 + 150\lambda^{12} + \dots)$$

- kが大きくてもqは小さい

- $k^2 > 1/2$ のときは双対変換で

$$k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow q \leq e^{-\pi} \sim 0.0432$$

- 展開因子

$$\lambda \equiv \frac{k^2}{2(1+k')(1+\sqrt{k'})^2} \approx \frac{k^2}{16}$$

$$k' \equiv \sqrt{1-k^2}$$

# 楕円関数のノーム表現

- ノームを用いた分数表現(高速計算に有利)
  - 基本母数範囲:  $0 < k^2 < 1/2$ に追い込んだ後を想定

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{\beta s y_s}{y_n}, \operatorname{cn}(u; k) = \frac{\sqrt{k'} \beta c y_c}{y_n}, \operatorname{dn}(u; k) = \frac{\sqrt{k'} y_d}{y_n}$$

$$s = \sin v, c = \cos v, v \equiv \frac{\pi u}{2K(k)} \quad \beta \equiv \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} = \frac{1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots)}{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots}$$

- 問:  $\beta$  と  $k$  を  $q$  の関数として図示せよ
- 正規化された4つの楕円テータ関数  $y(q)$



## y関数のq展開

- 正規化テータ関数: 収束が高速(問: 確かめよ)

$$y_s = 1 - C_2 q^2 + C_4 q^6 - C_6 q^{12} + \dots$$

$$y_c = 1 + S_3 q^2 + S_5 q^6 + S_7 q^{12} + \dots$$

$$y_d = 1 + 2(T_2 q + T_4 q^4 + T_6 q^9 + \dots)$$

$$y_n = 1 - 2(T_2 q - T_4 q^4 + T_6 q^9 + \dots)$$

- 展開係数(チェビシェフ多項式とその変形)

- 漸化式で  
計算可能

$$C_n \equiv \frac{\sin(n+1)\nu}{\sin \nu}, S_n \equiv \frac{T_n}{\cos \nu}, T_n \equiv \cos(n\nu)$$

# 楕円関数のフーリエ展開

- フーリエ展開(収束は遅いが...)

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}} \sin(2n+1)v$$

$$\operatorname{cn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}} \cos(2n+1)v$$

$$\operatorname{dn}(u; k) = \frac{\pi}{2K(k)} + \frac{2\pi}{K(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos 2nv$$

$$\operatorname{am}(u; k) = v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{n(1+q^{2n})} \sin 2nv$$

$$v \equiv \frac{\pi u}{2K(k)}$$

# 楕円関数の数値計算

- ガウスの**算術幾何平均**(問:収束が速いことを確認せよ)
  - 右2変数の共通収束値
- 振幅関数のランデン変換

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad \phi_{n+1} = \frac{\phi_n + \sin^{-1}(k_n \sin \phi_n)}{2} \quad v_n \equiv k_n u_n$$

- 計算アルゴリズム(問:プログラムを書け)
  - $u_0 = u, v_0 = ku$ から出発し、順変換を繰り返す。 $k_j = v_j / u_j$ は記録。
  - 収束後は $u_n = v_n$ 、すなわち $k_n = 1$ だから $\phi_n = u_n$
  - $\phi_n$ から出発し、 $k_j$ を用いて逆変換(問:求めよ)で $\phi_0$ まで戻す
- 計算プログラムの詳細: Numerical Recipe第2版

# 不完全楕円積分

- ヤコビ (1850): **有理4次式**の不定積分の基本形

- 第1種 
$$F(x; k) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

- 第2種 
$$E(x; k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-s^2}{1-k^2s^2}} ds$$

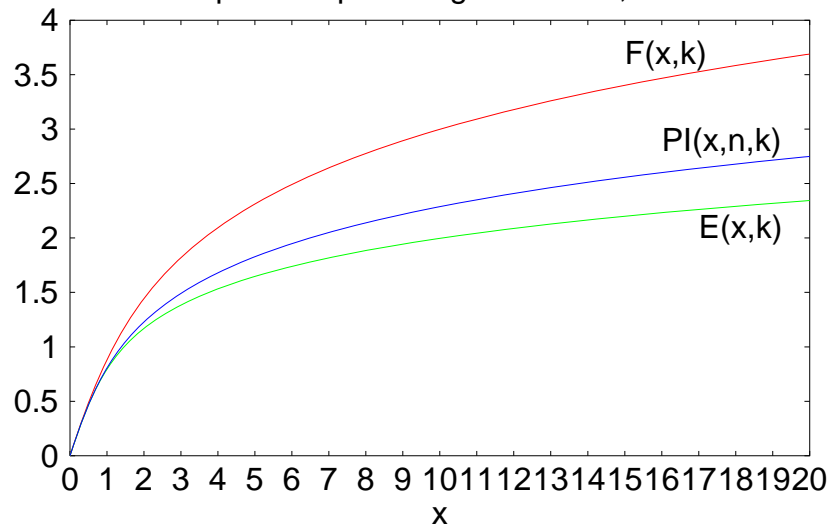
- 第3種: パラメータ  $n$  を  $-\alpha^2$  と表現することもある

$$\Pi(x; n, k) \equiv \int_0^x \frac{ds}{(1+ns^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$



## 不完全楕円積分(2)

Incomplete Elliptic Integrals:  $n=0.5$ ,  $k^2=0.5$



## 不完全楕円積分(3)

- **三角関数**を使った積分表現(ルジャンドル)
  - 広く普及。他の表現と第1引数の違いに注意

- 第1種 
$$F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

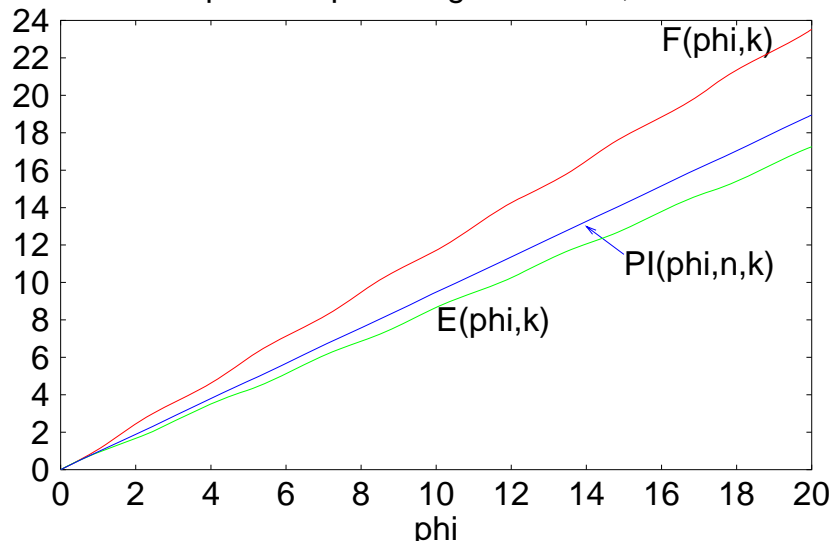
- 第2種 
$$E(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

- 第3種 
$$\Pi(\varphi; n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1+n \sin^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$



# 不完全楕円積分(4)

Incomplete Elliptic Integrals:  $n=0.5$ ,  $k^2=0.5$





## 不完全楕円積分(5)

- **楕円関数**を使った積分表現(ヤコビ)
  - 再び他の表現と第1引数の違いに注意
  - 他と区別するために新記号 $en, pn$ を導入

- 第1種  $F(u; k) = u$

- 第2種  $E(u; k) = \int_0^u \text{cn}^2(v; k) dv = en(u; k)$

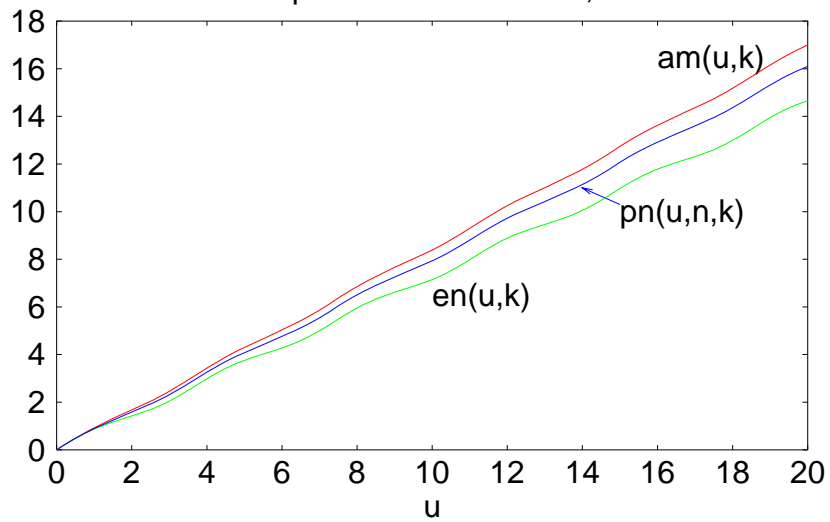
- 第3種  $\Pi(u; n, k) \equiv \int_0^u \frac{dv}{1 + n \text{sn}^2(v; k)} = pn(u; n, k)$





# 不完全楕円積分(6)

Jacobi Elliptic Functions:  $n=0.5$ ,  $k^2=0.5$



## 不完全楕円積分(7)

- 第2種不完全楕円積分の別表現

$$E(u; k) = \left( \frac{K(k)}{E(k)} \right) u + Z(u; k)$$

- ヤコビのゼータ関数 =  $E(u; k)$  の周期成分

$$Z(u; k) \equiv \text{zn}(u; k)$$

$$\simeq \frac{\pi}{K(k)} \left( \frac{2q \sin 2v - 4q^4 \sin 4v + 9q^9 \sin 6v}{1 - 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^9 \cos 6v} \right) \quad v \equiv \frac{\pi u}{2K(k)}$$

## 不完全楕円積分(8)

### ■ 特殊な場合

■  $k=0$

$$E(\varphi; 0) = F(\varphi; 0) = \varphi$$

$$\Pi(\varphi; n, 0) = \frac{\tan^{-1}(\sqrt{1+n} \tan \varphi)}{\sqrt{1+n}}$$

■  $k=1$

$$E(\varphi; 1) = \sin \varphi \quad F(\varphi; 1) = \ln \left( \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

■  $n=-k^2$

$$\Pi(\varphi; n, 1) = \frac{1}{n+1} \left[ n \tan^{-1}(n \sin \varphi) + \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right| \right]$$

$$\Pi(\varphi; -k^2, k) = \frac{1}{1-k^2} \left[ E(\varphi; k) - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]$$

# 引数による偏微分

- 引数 $u$ による偏微分
  - 母数 $k$ とパラメータ $n$ を固定

$\frac{\partial \operatorname{sn}(u; k)}{\partial u} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$	$\frac{\partial \operatorname{am}(u; k)}{\partial u} = \operatorname{dn} u$
$\frac{\partial \operatorname{cn}(u; k)}{\partial u} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$	$\frac{\partial \operatorname{en}(u; k)}{\partial u} = \operatorname{cn}^2 u$
$\frac{\partial \operatorname{dn}(u; k)}{\partial u} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$	$\frac{\partial \operatorname{pn}(u; n, k)}{\partial u} = \frac{1}{1 + n \operatorname{sn}^2(u; k)}$

## 母数による偏微分

- $m=k^2$ による楕円関数の偏微分(問: 示せ)

$$\frac{\partial \operatorname{sn}(u|m)}{\partial m} = \operatorname{cn}(u|m) \frac{\partial \operatorname{am}(u|m)}{\partial m}$$

$$\frac{\partial \operatorname{cn}(u|m)}{\partial m} = -\operatorname{sn}(u|m) \frac{\partial \operatorname{am}(u|m)}{\partial m}$$

$$\frac{\partial \operatorname{dn}(u|m)}{\partial m} = \frac{-\operatorname{sn}(u|m)}{2\operatorname{dn}(u|m)} \left[ \operatorname{sn}(u|m) + 2\operatorname{cn}(u|m) \frac{\partial \operatorname{am}(u|m)}{\partial m} \right]$$

$$\frac{\partial \operatorname{am}(u|m)}{\partial m} = \operatorname{dn}(u|m) \left[ \frac{\operatorname{pn}(u; -m|m) - u}{2m} \right]$$

# 不完全楕円積分の母数 などによる偏微分

- $m$ および $n$ による偏微分(問: 示せ)

$$\frac{\partial \operatorname{en}(u|m)}{\partial m} = \frac{\operatorname{en}(u|m) - u}{2m}$$

$$\frac{\partial \operatorname{pn}(u; n|m)}{\partial m} = \frac{1}{2} \left[ u + \frac{\operatorname{pn}(u; -m|m) - \operatorname{pn}(u; n|m)}{m+n} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{pn}(u; n|m)}{\partial n} = & \frac{1}{2(1+n)} \left[ \frac{\operatorname{pn}(u; n|m) - u}{n} + \frac{1-m}{m+n} \operatorname{pn}(u; -m|m) \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sn}(u|m) \operatorname{cn}(u|m)}{\{1 + n \operatorname{sn}^2(u|m)\} \operatorname{dn}(u|m)} \right] \end{aligned}$$

# 不完全楕円積分の 数値計算

- 一般不完全楕円積分の数値計算

(Fukushima and Ishizaki 1994b, CMDA)

$$G(\varphi; n_c, m_c, a, b) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta}{(\cos^2 \theta + n_c \sin^2 \theta) \sqrt{\cos^2 \theta + m_c \sin^2 \theta}} d\theta$$

- 基本公式(問: 確かめよ)

$$\lambda F(\varphi; k) + \mu E(\varphi; k) = G(\varphi; 1, 1-k^2, \lambda + \mu, \lambda + \mu(1-k^2))$$

$$\lambda F(\varphi; k) + \mu \Pi(\varphi; n, k) = G(\varphi; 1+n, 1-k^2, \lambda + \mu, \lambda(1+n) + \mu)$$



# 一般楕円関数

- 一般不完全楕円積分の楕円関数版

$$\text{gn}(u; n | m, a, b) \equiv G(\text{am}(u | m); 1+n, 1-m, a, b)$$

- 基本公式

$$\lambda u + \mu \text{en}(u | m) = \text{gn}(u; 1, 1-m, \lambda + \mu, \lambda + \mu(1-m))$$

$$\lambda u + \mu \text{pn}(u; n | m) = \text{gn}(u; 1+n, 1-m, \lambda + \mu, \lambda(1+n) + \mu)$$

- 応用その1 (問: 確かめよ)

$$\text{zn}(u | m) = \text{gn}\left(u; 1, 1-m, 1 - \frac{K}{E}, 1-m - \frac{K}{E}\right)$$





## 一般楕円関数の応用

- 応用その2(問:確かめよ)
  - 注:各種の偏微分計算で必要となる

$$\frac{(1-m)u - en(u|m)}{m} = \text{gn}(u; 1, 1-m, 1, 0)$$

$$\frac{u - pn(u; n|m)}{n} = \text{gn}(u; 1+n, 1-m, 0, 1)$$

$$\text{fn}(u|m) \equiv \frac{pn(u; -m|m) - u}{m} = \text{gn}(u; 1-m, 1-m, 0, 1)$$

# 完全楕円積分

- 完全積分 = 不完全積分の定積分

- 第1種  $K(k) \equiv F(1; k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

- 第2種  $E(k) \equiv E(1; k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}} dx$

- 第3種

$$\Pi(n, k) \equiv \Pi(1; n, k) = \int_0^1 \frac{ds}{(1+ns^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

## 完全楕円積分(2)

- 第3種完全楕円積分の別表現( $n > 0$ の場合)

$$\Pi(n, k) = \frac{k^2 K(k)}{k^2 + n} + \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sqrt{n} \Lambda_0(\beta; k)}{\sqrt{(1+n)(k^2 + n)}} \quad \beta \equiv \tan^{-1} \frac{\sqrt{n}}{k}$$

- ホイマン(Heuman)のラムダ関数

$$\Lambda_0(\beta; k) \equiv \frac{2}{\pi} \left[ \{E(k) - K(k)\} F(\beta; k') + K(k) E(\beta; k') \right]$$

## 完全楕円積分(3)

- 楕円関数の周期:  $4K$

- $K(0) = \pi/2, K(1) = \infty$

- 補数関係

$$K'(k) \equiv K(k'), E'(k) \equiv E(k') \quad k' \equiv \sqrt{1-k^2}$$

- 母数  $k$  を省くことが多い:  $K, K', E, E'$
- ルジャンドルの関係式

$$\Lambda_0\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = 1 \rightarrow EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$$

## 母数の双対変換

- 双対変換 (補数変換 or プライム変換)

$$k \rightarrow k' \equiv \sqrt{1-k^2} \quad m \rightarrow m' \equiv 1-m$$

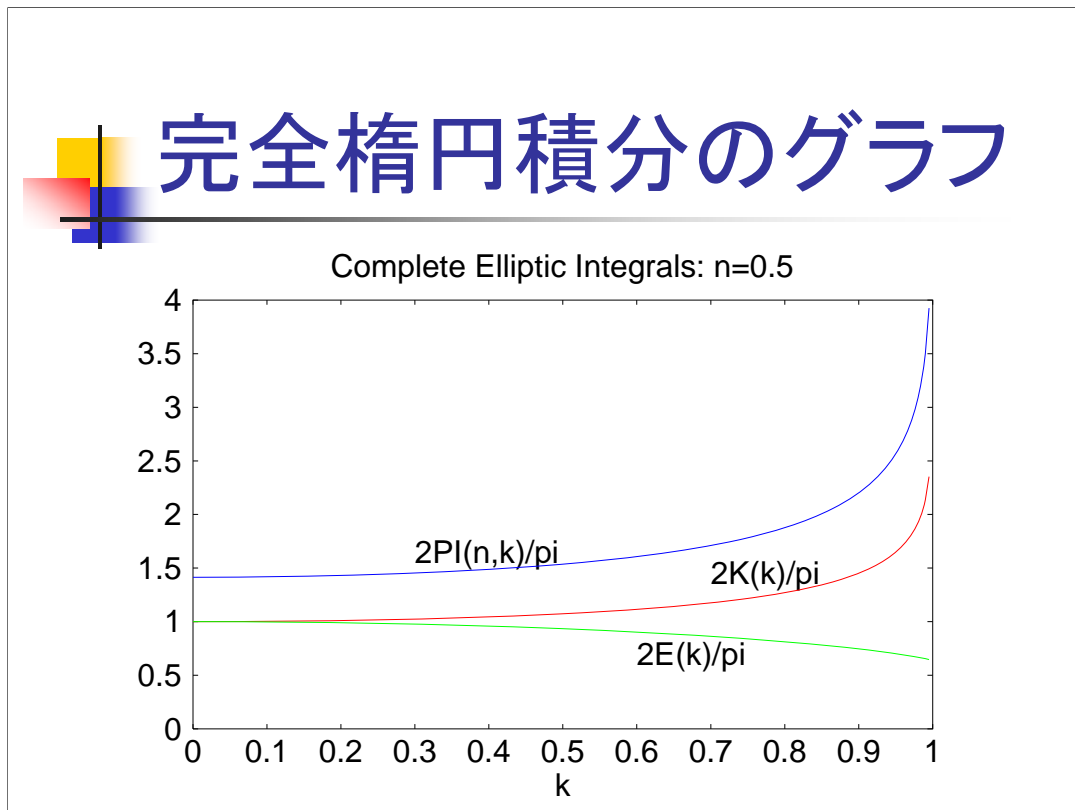
- $0 < k^2 < 1/2 \rightarrow 1/2 < k'^2 < 1$

- 完全楕円積分  $K, E \rightarrow K', E'$

- ノーム  $q \rightarrow q' \equiv \exp\left(\frac{\pi^2}{\log q}\right)$



# 完全楕円積分のグラフ



# 完全楕円積分の 数値計算

- 大げさ: 不完全楕円積分の計算ルーチンを呼ぶ
- 定番: 算術幾何平均(Numerical Recipe他)
- 実用的: 母数変換とノーム展開

- 例:  $k^2 < 1/2$  の場合

- 第1種 
$$K(k) = 2\pi \left( \frac{1 + 2q^4 + \dots}{1 + \sqrt{k'}} \right)^2$$

- 第2種 
$$E(k) = K(k) - \left( \frac{2\pi^2}{K(k)} \right) \left( \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \dots}{1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots)} \right)$$

## 母数が小さいとき

- 地球や月:  $m \sim 0$   $k_{\text{Earth}} \sim 3 \times 10^{-8}, k_{\text{Moon}} \sim 5 \times 10^{-6}$
- (母数の二乗である)  $m$  の1次までの展開で十分

$$q \approx \frac{m}{16} \quad k' \approx 1 - \frac{m}{2} \quad K \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \quad E \approx \frac{\pi}{2} \quad v \approx \left( 1 - \frac{m}{2} \right) u$$

$$\text{snu} = \left( 1 + \frac{m}{4} \cos^2 u \right) \sin v \quad \text{cnu} = \left( 1 - \frac{m}{4} \sin^2 u \right) \cos v$$

$$\text{dnu} = 1 - \frac{m}{2} \sin^2 u \quad \text{znu} \approx \frac{m}{4} \sin 2u \quad \text{enu} = \left( 1 + \frac{m}{2} \right) u + \text{znu}$$





## 6. 強制回転

- トルクがある場合
  - 例) 地球の歳差・章動、月の物理秤動
- 弱い摂動と強い摂動
  - 比較: 回転運動エネルギー vs トルク
- 無摂動状態
  - なるべく簡単化:  $A=B<C$ ,  $C-A\ll C$
  - C軸周りの永久回転
- 摂動: 形状軸の運動、回転速度変化

# トルクの慣性系表現

- 慣性系での表現は**複雑**(問:確かめよ)

$$N_X = \frac{3\mu}{r^5} [r_X r_Y I_{ZX} - r_Z r_X I_{XY} + (r_Y^2 - r_Z^2) I_{YZ} + r_Y r_Z (I_{ZZ} - I_{YY})]$$

- 残りは、添字の周回変更(X→Y→Z)で

- 慣性系での慣性モーメントの成分表現

$$I_{XY} = A(\mathbf{e}_A)_X (\mathbf{e}_A)_Y + B(\mathbf{e}_B)_X (\mathbf{e}_B)_Y + C(\mathbf{e}_C)_X (\mathbf{e}_C)_Y$$

$$\mathbf{I} = A\mathbf{e}_A \otimes \mathbf{e}_A + B\mathbf{e}_B \otimes \mathbf{e}_B + C\mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C$$

# トルクの慣性主軸系表現

- 慣性主軸系での表現は平易

$$\begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \end{pmatrix} = \left( \frac{3\mu}{r^5} \right) \begin{pmatrix} (C-B)r_B r_C \\ (A-C)r_C r_A \\ (B-A)r_A r_B \end{pmatrix}$$

$$N_A = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_{A, \dots}$$

$$r_A = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{A, \dots}$$

## トルクの相対的大きさ

- トルクの次元 = エネルギーの次元
- 回転エネルギーとトルクの比
  - 地球の場合: トルクは **極めて小さい**

$$\frac{N_E}{T_E} \approx \frac{3(C_E - A_E)}{C_E \omega_E^2} \left( \frac{\mu_S}{r_{SE}^3} + \frac{\mu_M}{r_{ME}^3} \right) \sin 2\varepsilon_E \approx 1.680 \times 10^{-7}$$

- 月の場合: トルクは小さい  $\varepsilon_M \approx 1^\circ 32' 33''$

$$\frac{N_M}{T_M} \approx \frac{3(C_M - A_M)}{C_M \omega_M^2} \left( \frac{\mu_E}{r_{EM}^3} \right) \sin 2\varepsilon_M \approx 9.91 \times 10^{-5}$$

## A=B<Cの場合

- $N_C=0 \rightarrow$  再び積分が存在

- 角運動量のC軸成分

$$\frac{dL_C}{dt} = 0 \rightarrow L_C = G_0$$

- トルク表現

$$\mathbf{N} = \frac{3\mu(C-A)r_C}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_C$$

- ポアソン(Poisson)近似

$$L_A = L_B = 0 \rightarrow \mathbf{L} = L_C \mathbf{e}_C$$

- オイラー角  $\psi, \theta$  の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{e}_C}{dt} = \frac{\mathbf{N}}{G_0}$$

## A=B<Cの場合(2)

- 回転運動方程式を慣性系で成分表現

$$\mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$G_0 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_Z \end{pmatrix}$$

- ポアソン近似でのオイラー角の運動方程式

- 注:トルクのZ成分は**不要**  
(問:なぜか?)

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_C - \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{N_X \cos \psi + N_Y \sin \psi}{G_0 \sin \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{N_X \sin \psi - N_Y \cos \psi}{G_0 \cos \theta}$$

## A ~ B < C の場合

- ラプラスの近似

- A < B < C の方程式で (A - B) / C の項を無視

$$\mathbf{N} \simeq \frac{3\mu(2C - A - B)r_C}{2r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_C$$

- 力学的扁平率 H の導入 + ポアソン近似

$$\frac{C - A}{C} \rightarrow H \equiv \frac{2C - A - B}{2C}$$

# 平面円運動近似

- 摂動天体の軌道: XY面を**等速円運動**

- 例: 地球回転に及ぼす太陽の摂動

- L: 地球の日心黄経  $r_c = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_c = \bar{r} \sin \theta \sin(L - \psi)$

$$\mathbf{r} = -\bar{r} \begin{pmatrix} \cos L \\ \sin L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{e}_c = \bar{r} \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin L \\ \cos \theta \cos L \\ \sin \theta \cos(L - \psi) \end{pmatrix}$$

- トルクの慣性系(X,Y)成分表現

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} = \left[ \frac{3\mu(C-A)}{2\bar{r}^3} \right] \sin 2\theta \sin(L - \psi) \begin{pmatrix} -\sin L \\ \cos L \end{pmatrix}$$



# 歳差解

- 歳差角と傾斜角の運動方程式

$$\frac{d\psi}{dt} = -\kappa \cos \theta [1 - \cos 2(L - \psi)] \quad \kappa = \frac{3\mu(C - A)}{2C\omega_{c0}\bar{r}^3}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\kappa \sin \theta \sin 2(L - \psi) \quad \psi^{(1)}(t) = \psi_0 - pt$$

- 第1近似解: 歳差 (precession)  $\theta^{(1)}(t) = \theta_0$
- 歳差定数  $p = \kappa \cos \theta_0$
- 初期条件 (地球の場合)  $\psi_0 = 0, \theta_0 = -\varepsilon_0 < 0$

## 日月歳差の粗い推定

- 地球  $\omega_{C_0} \approx 6.30039 \text{ rad/day}$   $\frac{C_E - A_E}{C_E} \approx 3.28474 \times 10^{-3}$   
 $\cos \varepsilon_0 \approx 0.917482$
- 月  $\frac{\mu_M}{\bar{r}_{EM}^3} \approx \left( \frac{M_M}{M_E + M_M} \right) n_{\ell}^2 \approx 6.31786 \times 10^{-4} (\text{rad/day})^2$
- 太陽  $\frac{\mu_S}{\bar{r}_{SE}^3} \approx n_{\ell}^2 \approx 2.95908 \times 10^{-4} (\text{rad/day})^2$
- 日月 (luni-solar) 歳差の粗い推定  $\kappa \approx 37.2229''/\text{jy}$   
 $p \approx (\kappa + \kappa') \cos \varepsilon_0 \approx 50.1467''/\text{jy}$   $\kappa' \approx 17.4340''/\text{jy}$

## 短周期章動の主要項

- 第2近似解(短周期章動**主要項**): 半月、半年

$$\psi^{(2)}(t) = \psi_0 - pt + \delta_1^{(2)}\psi \quad \theta^{(2)}(t) = \theta_0 + \delta_1^{(2)}\theta$$

$$\delta_1^{(2)}\psi = N_{2L} \cos \theta_0 \sin 2(L - \psi^{(1)})$$

$$\delta_1^{(2)}\theta = N_{2L} \sin \theta_0 \cos 2(L - \psi^{(1)})$$

$$N_{2L} = \frac{\kappa}{2(n_L + p)} \quad n_L = \frac{dL}{dt}$$

## 楕円運動近似

- 摂動天体(太陽)の軌道:XY面を楕円運動
  - 平均軌道経度  $L$ 、平均近点角  $\ell$
  - 近点経度  $\varpi \equiv L - \ell$
  - 軌道長半径  $a$ 、離心率  $e$
- 離心率の2次以上を無視

$$r_x = a \left( \cos L + \frac{e}{2} \cos(L + \ell) - \frac{3e}{2} \cos \varpi \right) \quad r_z = 0$$

$$r_y = a \left( \sin L + \frac{e}{2} \sin(L + \ell) - \frac{3e}{2} \sin \varpi \right) \quad r = a(1 - e \cos \ell)$$

## 楕円運動近似(2)

$$r_c = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_c = -a \sin \theta \left[ \sin(L - \psi) + \frac{e}{2} \sin(L - \psi + \ell) - \frac{3e}{2} \sin(\varpi - \psi) \right]$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{e}_c = a \begin{pmatrix} \cos \theta \left[ \sin L + \frac{e}{2} \sin(L + \ell) - \frac{3e}{2} \sin \varpi \right] \\ -\cos \theta \left[ \cos L + \frac{e}{2} \cos(L + \ell) - \frac{3e}{2} \cos \varpi \right] \\ -\sin \theta \left[ \cos(L - \psi) + \frac{e}{2} \cos(L - \psi + \ell) - \frac{3e}{2} \cos(\varpi - \psi) \right] \end{pmatrix}$$

## 楕円運動近似(3)

- トルクの慣性系(X,Y)成分表現(楕円近似)

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} = -N_0 \begin{pmatrix} \sin L + \frac{e}{2} \sin(L + \ell) - \frac{3e}{2} \sin \varpi \\ -\cos L - \frac{e}{2} \cos(L + \ell) + \frac{3e}{2} \cos \varpi \end{pmatrix}$$

$$N_0 \equiv - \left[ \frac{3\mu(C-A)}{2a^3} \right] \sin 2\theta (1 + 5e \cos \ell) \\ \times \left[ \sin(L - \psi) + \frac{e}{2} \sin(L - \psi + \ell) - \frac{3e}{2} \sin(\varpi - \psi) \right]$$

## 楕円運動近似(4)

- 歳差角と傾斜角の運動方程式(楕円近似)

$$\frac{d\psi}{dt} = -\kappa \cos \theta \left[ 1 - \cos 2(L - \psi) + 3e \cos \ell - \frac{7e}{2} \cos(2L - 2\psi + \ell) + \frac{e}{2} \cos(2L - 2\psi - \ell) \right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\kappa \sin \theta \left[ \sin 2(L - \psi) + \frac{7e}{2} \sin(2L - 2\psi + \ell) - \frac{e}{2} \sin(2L - 2\psi - \ell) \right]$$

# 短周期章動の楕円項

- 第2近似解への追加(楕円項)

- (1月、1年) + (10日、4月) + (半月、半年)

$$\delta_2^{(2)}\psi = -\cos\theta_0 \left[ N_\ell \sin\ell - N_{2L+\ell} \sin(2L - 2\psi^{(1)} + \ell) + N_{2L-\ell} \sin(2L - 2\psi^{(1)} - \ell) \right]$$

$$\delta_2^{(2)}\theta = \sin\theta_0 \left[ N_{2L+\ell} \cos(2L - 2\psi^{(1)} + \ell) - N_{2L-\ell} \cos(2L - 2\psi^{(1)} - \ell) \right]$$

$$N_\ell = \frac{3\kappa e}{n_\ell}, N_{2L+\ell} = \frac{7\kappa e}{2(2n_L + 2p + n_\ell)}, N_{2L-\ell} = \frac{\kappa e}{2(2n_L + 2p - n_\ell)}$$

- 振幅の比較

$$N_{2L} : N_\ell \approx 1 : 6e$$

$$N_\ell : N_{2L+\ell} : N_{2L-\ell} \approx 18 : 7 : 3$$

$$n_\ell = \frac{d\ell}{dt} \approx n_L$$



## 回転角の近似解

- 回転角の運動方程式

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_c - \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

- 1次近似解: 一様回転

$$\phi^{(1)}(t) = \phi_0 + \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \omega_{c0} + p \cos \theta_0$$

- 2次近似解: (章動による) 回転角変動

- 視恒星時GASTと平均恒星時GMSTの差

$$\phi^{(2)}(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \Delta\phi$$

$$\delta\phi = -(\Delta\psi) \cos \theta_0$$

## UT1の導入

- UT1: 世界時 (= 修正された回転角)

$$UT1 \equiv \int \omega_c dt = \phi - \int \cos \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right) dt$$

- 仮定: 1) 剛体、2)  $A=B$ 、  
3) トルクが外部質点潮汐力の主要項のみ
- 結論:  $UT1 = \omega_c t$ 
  - 摂動天体のいかによらず、UT1は(ニュートンの)絶対時間に比例する



# 出発点Departure point

- ニューカム(Newcomb)の出発点
  - ギノー(Guilot)の非回転原点Non Rotating Origin (NRO)と全く同じ
- 出発点の定義
  - 慣性主軸系の赤道(=AB面)上で、 $UT1=DA$ となる点D

$$UT1 = \widehat{DA} = \widehat{DN} + \widehat{NA}$$

$$\widehat{NA} = \phi, \quad \widehat{DN} = \int \cos \theta d\psi$$

## 3次元運動

- 摂動天体位置の慣性系座標
  - 注意: 回転する有限天体の重心が原点
- 座標の成分表現

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_X \\ r_Y \\ r_Z \end{pmatrix}$$

$$r_C = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_C = r_X \sin \theta \sin \psi - r_Y \sin \theta \cos \psi + r_Z \cos \theta$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} r_Y \cos \theta + r_Z \sin \theta \cos \psi \\ -r_X \cos \theta + r_Z \sin \theta \sin \psi \\ -r_X \sin \theta \cos \psi - r_Y \sin \theta \sin \psi \end{pmatrix}$$

## 3次元運動(2)

- トルクの慣性系(X,Y)成分表現(3次元近似)

$$N_x = \frac{-3\mu(C-A)}{r^5} \left[ r_x r_y \sin \theta \cos \theta \sin \psi + r_x r_z \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi \right. \\ \left. + r_y r_z (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \psi) + (r_z^2 - r_y^2) \sin \theta \cos \theta \cos \psi \right]$$

$$N_y = \frac{-3\mu(C-A)}{r^5} \left[ r_x r_y \sin \theta \cos \theta \cos \psi - r_y r_z \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi \right. \\ \left. - r_x r_z (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \psi) + (r_z^2 - r_x^2) \sin \theta \cos \theta \sin \psi \right]$$

## 3次元運動(3)

- 歳差角と傾斜角の運動方程式(ポアソン近似)

■ 問: 示せ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3\mu(C-A)}{C\omega_c r^5} \left[ r_x r_y \cos \theta \sin 2\psi + r_y r_z \left( \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \right) \cos \psi \right. \\ \left. - r_x r_z \left( \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \right) \sin \psi - r_x^2 \cos \theta \sin^2 \psi - r_y^2 \cos \theta \cos^2 \psi + r_z^2 \cos \theta \right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3\mu(C-A)}{C\omega_c r^5} \left[ -r_x r_y \sin \theta \cos 2\psi - r_y r_z \cos \theta \sin \psi \right. \\ \left. + r_x r_z \cos \theta \cos \psi + (r_x^2 - r_y^2) \sin \theta \sin \psi \cos \psi \right]$$

## 3次元円運動近似

- 軌道が傾斜した等速円運動  $r = \bar{r}$ 
  - 摂動天体が月の場合などに有効
  - 軌道傾斜角は一定  $I = I_0$
  - 昇交点経度は遅い等速運動  $\Omega = \Omega_0 + n_\Omega t$
  - 緯度引数  $F \equiv L - \Omega$
- 天体位置の慣性系(X,Y,Z)成分表現(問:示せ)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_X \\ r_Y \\ r_Z \end{pmatrix} = \bar{r} \begin{pmatrix} \cos F \cos \Omega - \sin F \cos I \sin \Omega \\ \cos F \sin \Omega + \sin F \cos I \cos \Omega \\ \sin F \sin I \end{pmatrix}$$

## 修正歳差解

- 近似1: 歳差角=0、傾斜角=一定
- 近似2: 短周期項の消去=Fに関する**平均化法**
- 結果(問: 示せ)

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = \kappa \cos \theta_0 \left[ -\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I_0\right) + \frac{\sin 2I_0}{\tan 2\theta_0} \cos \Omega + \frac{\sin^2 I_0}{2} \cos 2\Omega \right]$$

$$\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = -\kappa \cos \theta_0 \left[ \frac{\sin 2I_0}{2} \sin \Omega + \frac{\tan \theta_0 \sin^2 I_0}{2} \sin 2\Omega \right]$$

- 歳差定数の**修正**

$$p = \kappa \cos \theta_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I_0\right)$$



# 平均化法

- 「短周期項の消去」とも言う
- 意味: 中間的な時間平均
- 第1段階: 加法定理などを駆使してフーリエ展開
- 第2段階: 短周期の角度の三角関数=0

$$\langle \sin jF \rangle = 0 \quad \langle \cos jF \rangle = 0 \quad \text{when } j \neq 0$$

- 平均化法の例:

$$\langle r_z^2 \cos \theta \rangle = \langle \bar{r}^2 \sin^2 F \sin^2 I \cos \theta \rangle = \frac{\bar{r}^2 \sin^2 I_0 \cos \theta_0}{2}$$

## 長周期章動

- 仮定：昇交点経度が等速運動

- 注意：月の昇交点(対黄道)は逆回り  $n_{\Omega} < 0$

$$\Delta^{(1)}\psi = \frac{\kappa \cos \theta_0}{n_{\Omega}} \left[ \frac{\sin 2I_0}{\tan 2\theta_0} \sin \Omega + \frac{\sin^2 I_0}{4} \sin 2\Omega \right]$$

$$\Delta^{(1)}\theta = \frac{\kappa \cos \theta_0}{n_{\Omega}} \left[ \frac{\sin 2I_0}{2} \cos \Omega + \frac{\tan \theta_0 \sin^2 I_0}{4} \cos 2\Omega \right]$$

- 昇交点の周期が長い→大振幅

- 古代中国暦での長周期＝「章」(18.6年)→章動

# 日月歳差

- 逆符号に要注意  $\psi \equiv -\psi^{(1)} = pt$ ,  $\varepsilon \equiv -\theta^{(1)} = \varepsilon_0$
- 月(プライムなし)と太陽(プライム付)の影響のみ
- 黄道傾角  $\varepsilon_0 \approx 84381''$ ,  $\cos \varepsilon_0 \approx 0.917482$ ,  $\sin \varepsilon_0 \approx 0.397777$
- 月の軌道傾斜  $I_0 \approx 18467''$ ,  $\sin I_0 \approx 0.089411$
- 日月歳差の推定値

$$\kappa \cos \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 I_0 \right) \approx 33.7418''/\text{jy}$$

$$p \approx 49.7372''/\text{jy}$$

$$\kappa' \cos \varepsilon_0 \approx 15.9954''/\text{jy}$$

## 長周期章動の評価(2)

- 再び**逆符号**に注意  $\Delta\psi = -\Delta^{(1)}\psi$ ,  $\Delta\varepsilon = -\Delta^{(1)}\theta$
- 月の影響のみ

$$\Delta\psi = \frac{\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_\Omega|} \left[ -\left( \frac{\sin 2I}{\tan 2\varepsilon_0} \right) \sin \Omega + \frac{\sin^2 I}{4} \sin 2\Omega \right]$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_\Omega|} \left[ \frac{\sin 2I}{2} \cos \Omega - \frac{\tan \varepsilon_0 \sin^2 I}{4} \cos 2\Omega \right]$$

## 長周期章動の評価(3)

- 昇交点黄経の速度

$$n_{\Omega} \approx -6.96289 \times 10^4 \text{"/jy}$$

$$\frac{\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_{\Omega}|} \approx 103.130''$$

- 長周期章動の振幅(問:確かめよ)

$$\psi_{\Omega} = \frac{-\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_{\Omega}|} \left( \frac{\sin 2I}{\tan 2\varepsilon_0} \right) = -17.202''$$

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_{\Omega}|} \left( \frac{\sin 2I}{2} \right) = 9.184''$$

$$\psi_{2\Omega} = \frac{\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_{\Omega}|} \left( \frac{\sin^2 I}{4} \right) = 0.206''$$

$$\varepsilon_{2\Omega} = \frac{-\kappa \cos \varepsilon_0}{|n_{\Omega}|} \left( \frac{\tan \varepsilon_0 \sin^2 I}{4} \right) = -0.089''$$

- まとめ

$$\begin{cases} \Delta\psi = -17.202'' \sin \Omega + 0.206'' \sin 2\Omega \\ \Delta\varepsilon = +9.184'' \sin \Omega - 0.089'' \sin 2\Omega \end{cases}$$

## 短周期章動の評価

- 表現の簡易化
  - $L \rightarrow L + \psi$  : 平均経度に歳差角を加えて再定義
  - 再定義の意味 = 経度を「動く春分点」から測る

$$\delta\psi = \cos \varepsilon_0 \left[ -N_{2L} \sin 2L + N_{\ell} \sin \ell - N_{2L+\ell} \sin(2L+\ell) + N_{2L-\ell} \sin(2L-\ell) \right. \\ \left. - N_{2L'} \sin 2L' + N_{\ell'} \sin \ell' - N_{2L'+\ell'} \sin(2L'+\ell') + N_{2L'-\ell'} \sin(2L'-\ell') \right]$$

$$\delta\varepsilon = \sin \varepsilon_0 \left[ N_{2L} \cos 2L + N_{2L+\ell} \cos(2L+\ell) - N_{2L-\ell} \cos(2L-\ell) \right. \\ \left. + N_{2L'} \cos 2L' + N_{2L'+\ell'} \cos(2L'+\ell') - N_{2L'-\ell'} \cos(2L'-\ell') \right]$$

## 短周期章動の評価(2)

- 基礎定数(月=プライム無、太陽=プライム有)

$$n_\ell \approx 1.718 \times 10^7 \text{ "/y} \quad n_{\ell'} \approx 1.296 \times 10^6 \text{ "/y} \quad e_M \approx 0.0549, e_E \approx 0.0167$$

- 短周期係数  $N_{2L} = \frac{\kappa}{2n_\ell}, N_\ell = \frac{3\kappa e}{n_\ell}, N_{2L+\ell} = \frac{7\kappa e}{6n_\ell}, N_{2L-\ell} = \frac{\kappa e}{2n_\ell}$

- 短周期章動の振幅定数(問:確かめよ)

$$N_{2L} \approx 0.228", N_\ell \approx 0.075", N_{2L+\ell} \approx 0.029", N_{2L-\ell} \approx 0.013"$$

$$N_{2L'} \approx 1.383", N_{\ell'} \approx 0.139", N_{2L'+\ell'} \approx 0.054", N_{2L'-\ell'} \approx 0.023"$$

## 短周期章動の評価(3)

- 短周期章動のまとめ(問:最新理論と比較せよ)

$$\begin{aligned}\delta\psi = & -1.269'' \sin 2L' - 0.209'' \sin 2L + 0.128'' \sin \ell' \\ & + 0.069'' \sin \ell - 0.050'' \sin (2L' + \ell') - 0.027'' \sin (2L + \ell) \\ & + 0.021'' \sin (2L' - \ell') + 0.012'' \sin (2L - \ell)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon = & 0.550'' \cos 2L' + 0.091'' \cos 2L + 0.021'' \cos (2L' + \ell') \\ & + 0.012'' \cos (2L + \ell) - 0.009'' \cos (2L' - \ell') \\ & - 0.005'' \cos (2L - \ell)\end{aligned}$$

- これより先は、解析力学を用いないと大変！



## A < B < C の場合

- 一般の場合、解析的扱いは非常に複雑
- **ポスト・ポアソン近似**  $\omega_A, \omega_B \ll \omega_C$ 
  - オイラーの運動方程式 (潮汐トルクの場合)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \omega_B \omega_C \\ \beta \omega_C \omega_A \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\mu}{r^5} \begin{pmatrix} \alpha r_B r_C \\ \beta r_C r_A \\ \gamma r_A r_B \end{pmatrix}$$

## カッシニ(Cassini)近似

- 摂動天体の軌道: 再び3次元円運動近似
- **カッシニの3法則**が成立(例: 月の回転)

$$\langle \psi \rangle = \Omega, \quad \langle \theta \rangle = -\theta_0, \quad \langle \phi + \psi \rangle = L + \pi$$

- 微小傾斜近似: 軌道面傾斜  $I$  と傾斜角  $\theta$

- 位置の近似表現

(問: 示せ)

$$F = L - \Omega$$

$$\begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \bar{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(\theta_0 + I) \sin F \end{pmatrix}$$

## カッシーニ近似(2)

- カッシーニ近似の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix} + \omega_C \begin{pmatrix} \alpha\omega_B \\ \beta\omega_A \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-3\mu\beta(\theta_0 + I)}{\bar{r}^3} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin F \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 積分: 角速度C軸成分=平均軌道経度運動

$$\omega_C = n_L$$

## カッシニ近似(3)

- 角速度のA,B軸成分: **強制振動**の方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \end{pmatrix} + n_L \begin{pmatrix} \alpha \omega_B \\ \beta \omega_A \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 0 \\ \sin F \end{pmatrix} \quad W \equiv \frac{-3\mu\beta(\theta_0 + I)}{\bar{r}^3}$$

- 強制振動の特殊解 (問: 確かめよ)

$$\begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \end{pmatrix} = \frac{W}{n_F^2 - n_E^2} \begin{pmatrix} \alpha n_L \sin F \\ -n_F \cos F \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n_E \equiv n_L \sqrt{-\alpha\beta} \ll n_L \\ n_F \equiv \frac{dF}{dt} = n_L - n_\Omega > n_L \end{matrix}$$

- 問: 自由振動も含む一般解を求めよ

## カッシーニ近似(4)

- オイラー角の近似解(問:確かめよ)

$$\psi = \psi_0 + \frac{W}{2\theta_0(n_F^2 - n_E^2)} \left[ (n_F - \alpha n_L)(t - t_0) - \left( \frac{n_F + \alpha n_L}{2n_F} \right) \sin 2F \right]$$

$$\theta = -\theta_0 + \frac{W}{2(n_F^2 - n_E^2)} \left( \frac{n_F + \alpha n_L}{2n_F} \right) \cos 2F$$

$$\phi = L + \pi - \psi$$

- カッシーニ近似の**成立条件**のうち2つを満足

$$\langle \theta \rangle = -\theta_0, \quad \langle \phi + \psi \rangle = L + \pi$$

## カッシーニ近似(5)

- カッシーニ近似の成立条件の最後  $\langle \psi \rangle = \Omega$ 
  - 平均傾斜角の**決定**(問: 示せ)

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = n_{\Omega} \rightarrow \theta_0 = \frac{n_I}{(-n_{\Omega}) - n_I} I \quad n_I \equiv \frac{-3\mu\beta(n_F - \alpha n_L)}{2\bar{r}^3(n_F^2 - n_E^2)}$$

- 月の場合(問: Eckhardt(1981)と比べよ)

$$n_{\Omega} \approx -6.963 \times 10^4 "/\text{jy}, \quad n_F \approx 1.7395 \times 10^7 "/\text{jy}, \quad n_L \approx 1.7325 \times 10^7 "/\text{jy}$$

$$\alpha_M = 3.99 \times 10^{-4}, \quad \beta_M = -6.32 \times 10^{-4}, \quad n_E = 8.70 \times 10^{-3}$$

$$\mu/\bar{r}^3 \approx n_F^2 \quad n_I \approx 1.648 \times 10^4 "/\text{jy} \quad I \approx 18467" \quad \therefore \theta_0 \approx 5527"$$

# ポスト・カッシーニ近似

- カッシーニ近似の**拡張** (例: 月の回転)

$$\langle \psi \rangle = \Omega, \langle \theta \rangle = -\theta_0, \langle \phi \rangle = \langle \nu \rangle + \pi$$

- 緯度引数  $\nu = \omega + f$ 、真近点角  $f$
- 軌道面傾斜  $I$  と傾斜角  $\theta$  は微小
- 円軌道近似

- 位置表現  
(問: 示せ)

$$\begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} \approx \bar{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \psi + \phi - (\nu + \Omega + \pi) \\ -(I - \theta) \sin \nu \end{pmatrix}$$

## ポスト・カッシニ近似(2)

### ■ 運動方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix} + \omega_C \begin{pmatrix} \alpha\omega_B \\ \beta\omega_A \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\mu}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(I-\theta)\sin v \\ \gamma(v+\Omega+\pi-\psi-\phi) \end{pmatrix}$$

### ■ $\theta \sim 0 \rightarrow$ C軸成分: 強制振動(問: 示せ)

$$\frac{d^2(\psi+\phi)}{dt^2} + n_P^2(\psi+\phi) = n_P^2(v+\Omega+\pi) \quad n_P \equiv \sqrt{\frac{3\gamma\mu}{r^3}}$$



## ポスト・カッシーニ近似(3)

- 経度秤動角の導入(平均軌道経度Lとの差)
  - 経度の光学(optical)秤動  $\nu + \Omega - L$
  - 経度の物理(physical)秤動  $\tau \equiv \psi + \phi - L - \pi$
- 強制振動の方程式(問:導け)
  - 自由振動の角速度  $n_p$
  - 右辺は既知(=軌道運動理論から得られる)

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + n_p^2\tau = n_p^2(\nu + \Omega - L) = n_p^2 \sum_k H_k \sin(n_k t + \phi_k)$$

## ■ ポスト・カッシニ近似(4)

- 経度の物理秤動(physical libration in longitude)の解: 添字Pは自由振動成分
  - 問: 導け

$$\tau = \tau_0 + \tau_P \sin n_P (t - t_0) + \sum_k \frac{n_P^2}{n_P^2 - n_k^2} H_k \sin(n_k t + \varphi_k)$$

- 角速度C軸成分の解

$$\omega_C = n_L + n_P \tau_P \cos n_P (t - t_0) + \sum_k \frac{n_k n_P^2}{n_P^2 - n_k^2} H_k \cos(n_k t + \varphi_k)$$

## ■ ポスト・カッシニ近似(5)

- 角速度のA,B軸成分:  $\theta \sim -\theta_0 \rightarrow$  強制振動

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \end{pmatrix} + n_L \begin{pmatrix} \alpha \omega_B \\ \beta \omega_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_k J_k \sin(n_k t + \varphi_k) \end{pmatrix}$$

- 一般解(問:確かめよ)

- 自由極運動の角速度

$$n_E \equiv n_L \sqrt{-\alpha\beta}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \cos n_E (t - t_0) \\ \sqrt{-\beta} \sin n_E (t - t_0) \end{pmatrix} + \sum_k \frac{J_k}{n_k^2 - n_E^2} \begin{pmatrix} \alpha n_L \sin(n_k t + \varphi_k) \\ -n_k \cos(n_k t + \varphi_k) \end{pmatrix}$$



## 12.参考文献

---

- ゴールドスタイン;1983、「新版古典力学上・下」、瀬川・矢野・江沢訳、吉岡書店
- 井上(監修)、瀬藤・吉田著;1983、「古典力学の問題と解説」、吉岡書店
- 笹尾哲夫;1982、「地球回転運動」、東京大学大学院講義ノート(自費出版)
- 戸田盛和;1976、「楕円関数入門」、日本評論社



## 参考文献(2)

---

- 堀源一郎; 1978、「天体力学特論」、東京大学大学院講義ノート(聞き書き)
- 堀源一郎; 1990、「はじめての力学講義」、丸善
- Byrd and Friedman; 1954, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer
- Beutler; 2005, *Methods of Celestial Mechanics I & II*, Springer



## 参考文献(3)

---

- Kovalevsky et al. (ed.); 1989, *Reference Systems*, Kluwer
- MacMillan; 1936, *Dynamics of Rigid Bodies*, Dover
- McCarthy and Petit (eds); 2005, *IERS Convention 2003*, IERS Tech. Note 32
- Misner, Thorne, and Wheeler; 1973, *Gravitation*, W.H. Freeman



## 参考文献(4)

---

- Moritz and Mueller; 1986, *Earth Rotation: Theory and Observation*, Ungar
- Seidelmann (ed.); 1992, *Explanatory Supplement To Astronomical Almanac*, Univ. Sci. Books
- Whittaker; 1961, *A Treatise on Analytical Dynamics, 4th ed.*, Dover

## 講師



- 福島登志夫
- 自然科学研究機構  
国立天文台 (NAOJ)
- 181-8588 東京都三鷹市大沢2-21-1
- [Toshio.Fukushima@nao.ac.jp](mailto:Toshio.Fukushima@nao.ac.jp)
- <http://chiron.mtk.nao.ac.jp/~toshio/>